



재료강도학-강의자료

제 2 장 소 성

한밭대학교 신소재공학과 신기현

복습: 제1장 탄성

응력의 종류: 압축, 인장, 전단

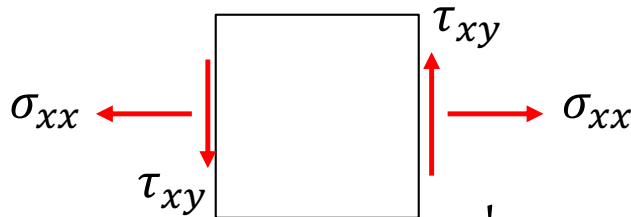
응력의 요소: 면의방향 + 응력의 방향 → 행렬화

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

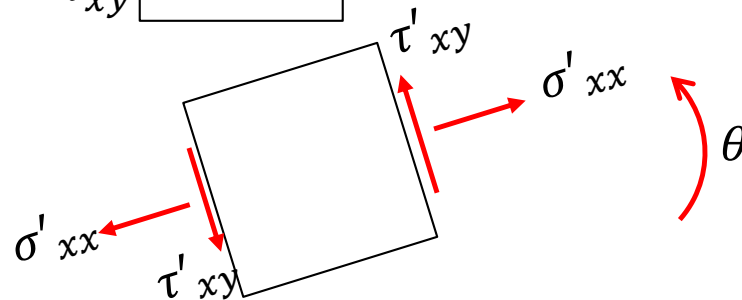
모멘트: 힘의 평형 → 모멘트의 평형 →

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

응력의 부호:



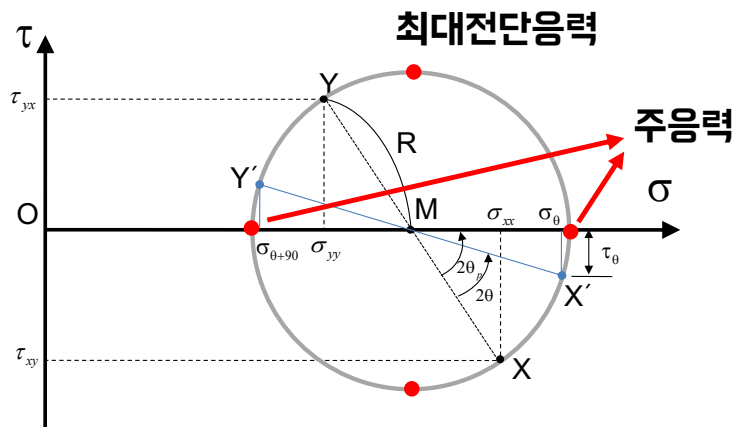
응력의 변환(각도)



각도의 변화에 따라 수직응력이 최대/최소가 되는 → 주응력
→ 이때의 전단응력=0

동일하게 최대전단응력도 계산 가능

Mohr 원



복습: 제1장 탄성

변위: translation, rotation, deformation
 변형률: 수직변형률, 전단변형률 → 행렬화

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

모멘트: 힘의 평형 → 모멘트의 평형 →

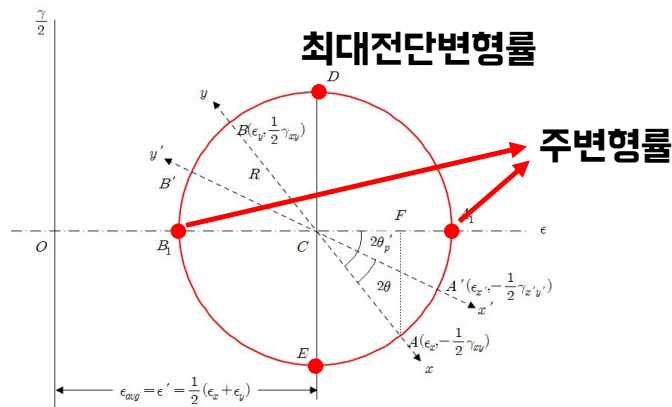
$$x = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

변형률의 변환 (각도)

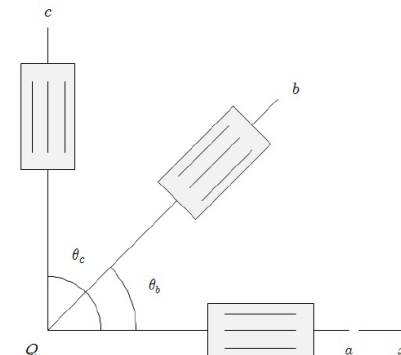
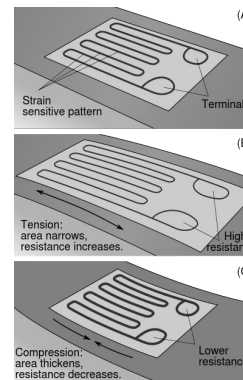
각도의 변화에 따라 수직변형률이 최대/최소가 되는 → 주변형률
 → 이때의 전단변형률=0

동일하게 최대전단변형률도 계산 가능

Mohr 원



변형률 게이지와 변형률 로제트



복습: 제1장 탄성

- 변형률-응력의 관계

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}\sigma_z \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_z \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E}\sigma_z - \frac{\nu}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xz}\end{aligned}$$

- 전단계수(G)

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

- 응력-변형률 관계

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_x + \nu(\epsilon_y + \epsilon_z)] & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_y + \nu(\epsilon_z + \epsilon_x)] & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{yz} \\ \sigma_z &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\epsilon_z + \nu(\epsilon_x + \epsilon_y)] & \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xz}\end{aligned}$$



2.1 연성금속의 1축인장

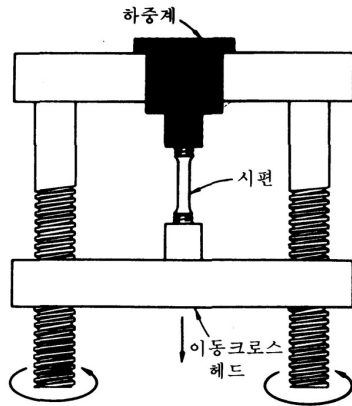


그림 2-1 인장시험의 설명도

1. F_2 까지 하중 증가 → 하중 제거
: op 만큼의 영구변형

2. 다시 하중을 가하면 ?
: $pbcd$ 를 따라 거동한다.

3. $a-c$ 까지 단면적이 줄어 듦에도 불구하고
하중이 계속 증가 → 왜?
: 재료가 가공경화를 겪기 때문에

이 곡선은 같은 재료여도 시편의 크기에 따라 달라지게 됨.

→ 재료의 특성을 나타내기 적절하지 X

→ 공칭응력(S)-공칭변형률(e) 곡선을 사용

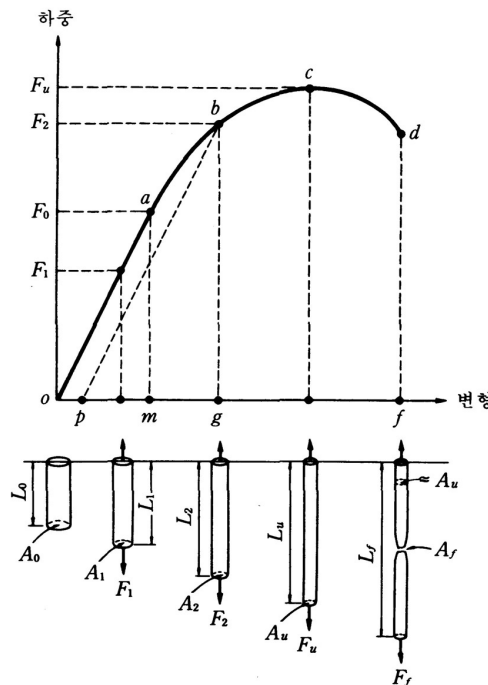


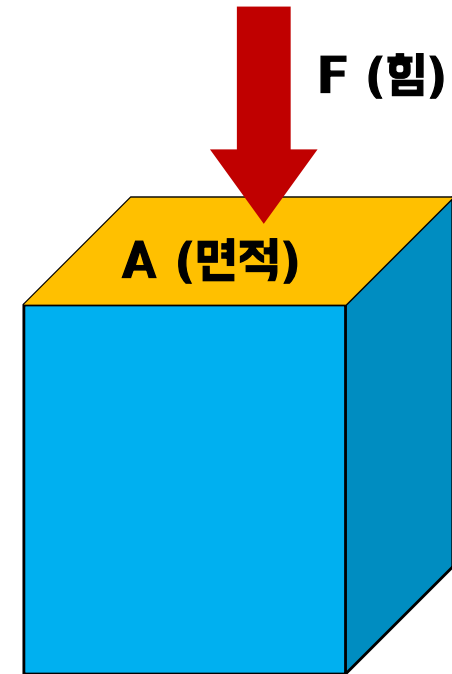
그림 2-2 인장시험에서 얻는 하중-변형 곡선과 시편의 모양

2.1 연성금속의 1축인장

응력 (stress) 의 정의: 단위면적 당 힘의 세기

응력의 단위 : $\text{N/m}^2 = \text{Pa}$ (파스칼)

- 수직응력(Normal stress, σ)
:면에 법선(normal)으로 작용하는 응력
(압축응력, 인장응력)
- 전단응력(Shear stress, τ)
:면에 수평(parallel)으로 작용하는 응력

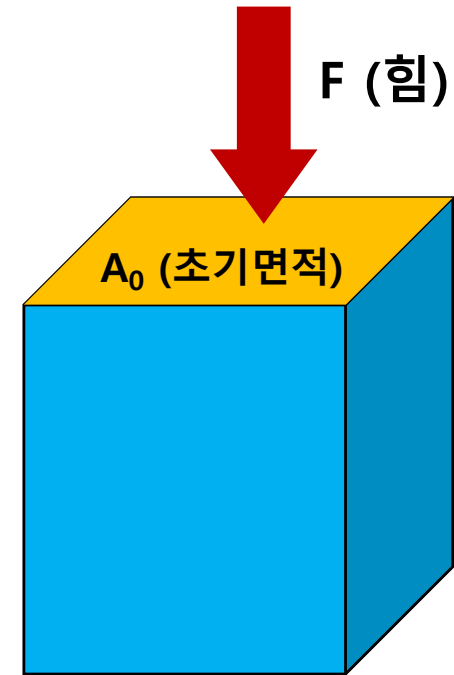


$$\sigma = \frac{F}{A}$$

2.1 연성금속의 1축인장 - 공칭응력

응력 (stress) 의 정의: **단위면적 당 힘의 세기**
응력의 단위 : $\text{N/m}^2 = \text{Pa}$ (파스칼)

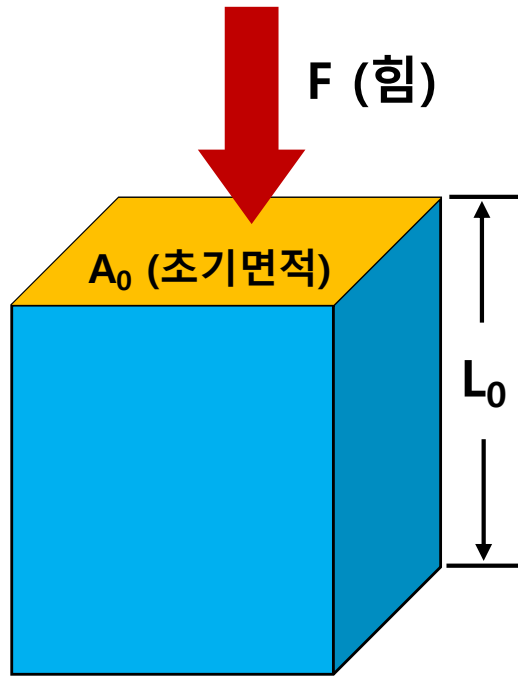
- 수직응력(Normal stress, σ)
:면에 법선(normal)으로 작용하는 응력
(압축응력, 인장응력)
- 전단응력(Shear stress, τ)
:면에 수평(parallel)으로 작용하는 응력



$$S = \frac{F}{A_0}$$

공칭응력 \nearrow S $=$ $\frac{F}{A_0}$ \nwarrow 초기면적

2.1 연성금속의 1축인장 - 공칭변형률



$$S = \frac{F}{A_0}$$
 공칭응력 \leftarrow S \leftarrow 초기면적 A_0

• 공칭변형률

$$e = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\Delta L}{L_0}$$

• 항복강도

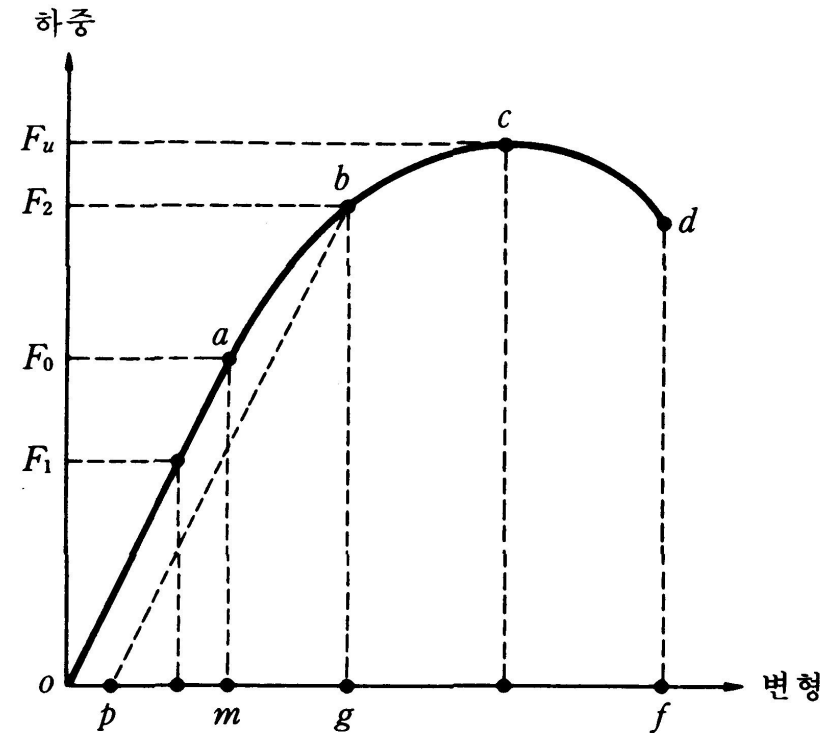
$$S_0 = \frac{F_0}{A_0}$$

• 최대강도

$$S_u = \frac{F_u}{A_0}$$

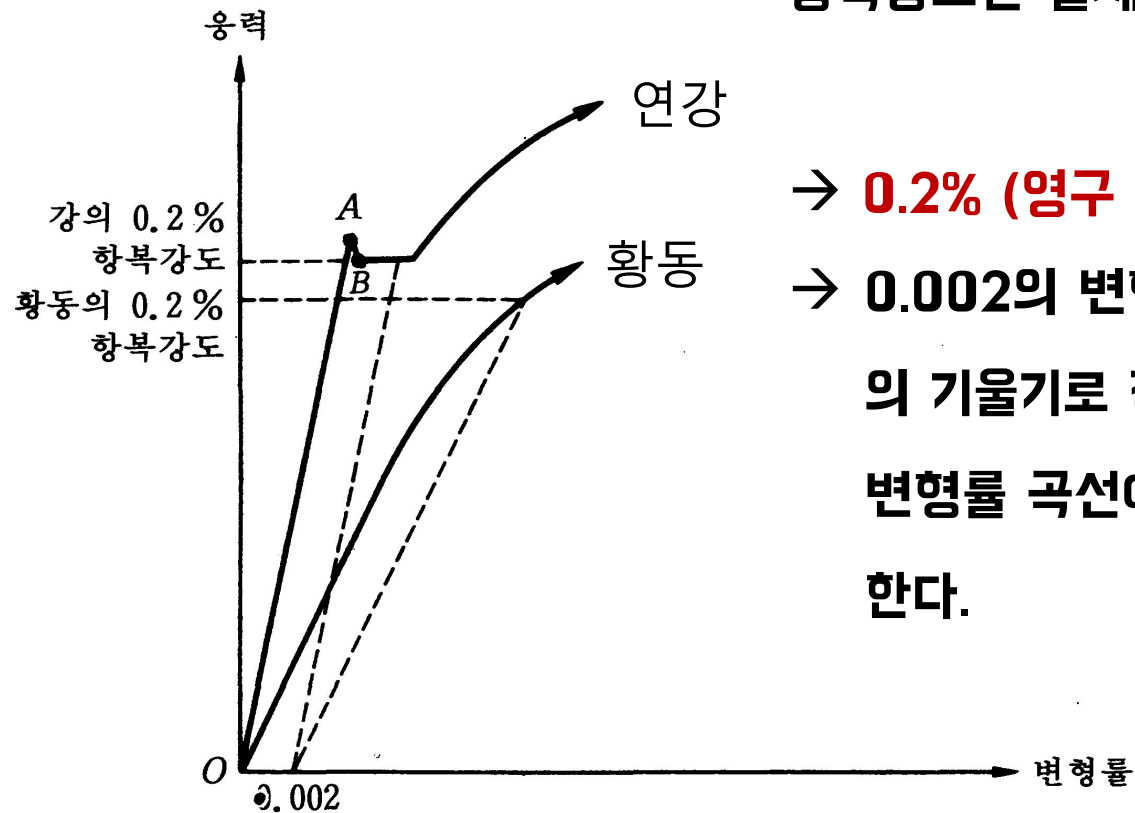
~~• 파괴강도~~

~~$$S_f = \frac{F_f}{A_0}$$~~



2.1 연성금속의 1축인장 - 항복강도

항복강도는 실제로 분명하게 구하기 힘들다.



→ **0.2% (영구 변형) 항복강도**가 일반적

→ 0.002의 변형률에서 young's modulus (E)의 기울기로 직선을 그리고, 이 직선과 응력-변형률 곡선이 만나는 점의 응력을 항복강도라 한다.

그림 2-3 0.2% (영구 변형) 항복강도를 구하는 방법

2.2 진응력과 진변형률

- 실제 인장시험에서 변형이 증가함에 따라 **시편의 단면적이 점차 감소한다.**
하중 F 를 받고 있을 때, 시편의 단면적을 A
- 시편의 실제 응력 (**진응력**, σ)은 다음과 같다.

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

- **진변형률 (ε)**

$$\varepsilon = \frac{L_1 - L_0}{L_0} + \frac{L_2 - L_1}{L_1} + \frac{L_2 - L_1}{L_2} + \dots$$

$$= \int_{L_0}^L \frac{dL}{L} = \ln \frac{L}{L_0} = \ln(e + 1) \quad \because e = \frac{L - L_0}{L_0}$$

2.2 진응력과 진변형률

- 실제 금속을 심하게 소성변형 시킨 후 밀도의 변화 0.1 % 이하
- 따라서 체적변화가 없다고 가정 ($V - V_0 = \Delta V = 0$)

$$V = LA, \quad V_0 = L_0A_0$$

$$LA = L_0A_0$$

$$\varepsilon = \ln \frac{L}{L_0} = \ln \frac{A_0}{A}$$



예제2-1

표점거리 5cm 인 강봉을 다음과 같이 3단계로 인장하여 6 cm 인 봉을 얻었다.

1단계: 5 cm 에서 5.3 cm 로

2단계: 5.3 cm 에서 5.6 cm 로

3단계: 5.6 cm 에서 6 cm 로

(1) 각 단계의 공칭변형률을 계산하고 3 가지의 공칭변형률의 합과 총 공칭변형률을 비교하라.

$$e_1 = (5.3 - 5)/5 = 0.06$$

$$e_2 = (5.6 - 5.3)/5.3 = 0.0566$$

$$e_3 = (6.0 - 5.6)/5.6 = 0.0714$$

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0.188 \approx 0.19$$

$$e = (6 - 5)/5 = 0.20$$



예제2-1

표점거리 5cm 인 강봉을 다음과 같이 3단계로 인장하여 6 cm 인 봉을 얻었다.

1단계: 5 cm 에서 5.3 cm 로

2단계: 5.3 cm 에서 5.6 cm 로

3단계: 5.6 cm 에서 6 cm 로

(2) 위의 문제를 진변형률에 대하여 풀어라.

$$\varepsilon_1 = \ln(5.3/5) = 0.05827$$

$$\varepsilon_2 = \ln(5.6/5.3) = 0.05506$$

$$\varepsilon_3 = \ln(6/5.6) = 0.06899$$

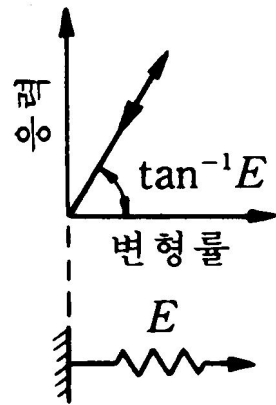
$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0.18232 \approx \mathbf{0.18}$$

$$\varepsilon = \ln(6/5) = 0.18232 \approx \mathbf{0.18}$$

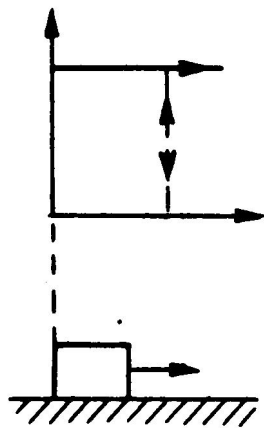


2.2 진응력과 진변형률 - 다양한 탄성-소성 모델

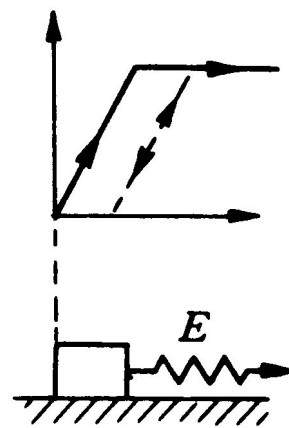
- 실제 소성변형을 모델화 하기는 매우 어려움
- 간단한 가정을 통해서 수식화, 모델화 (**스프링과 마찰력을 활용**)
 - 소성변형을 직선으로 가정
 - 변형경화가 없는 경우 : 완전소성
 - 탄성변형이 없는 경우 : 강체



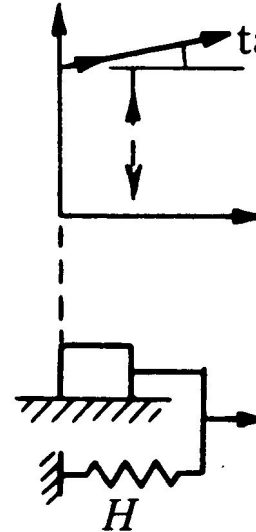
(a) 완전탄성



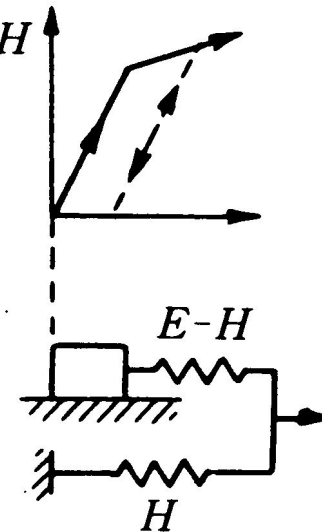
(b) 강체-완전소성



(c) 탄성-완전소성



(d) 강체-선형가공경화



(e) 탄성-선형 가공경화

2.2 진응력과 진변형률 - 다양한 탄성-소성 모델

- 가장 일반적인 모델

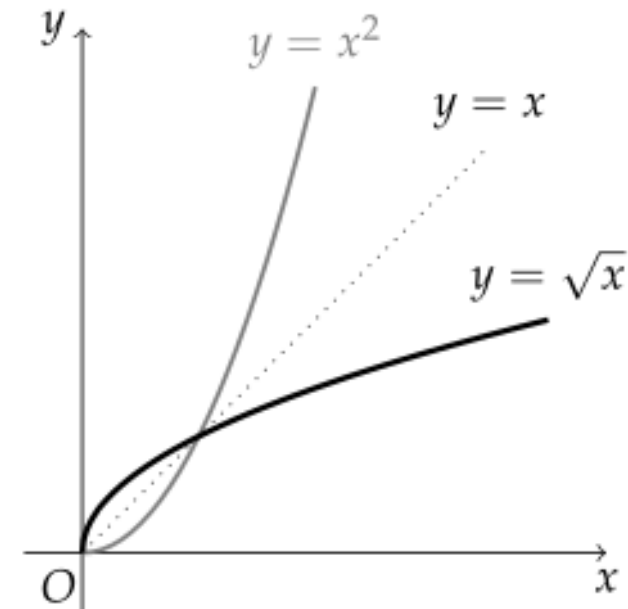
$$\sigma = K\varepsilon^n$$

K : 강도계수, n = 변형경화 지수

표 2-4 여러 가지 금속의 K와 n의 값

재 료	K (MPa)	n
低炭素鋼, 어닐링	530	0.26
1112鋼, 어닐링	758	0.19
1112강, 冷間壓延	758	0.08
4135강, 어닐링	1014	0.17
4135강, 냉간압연	1103	0.14
4340강, 어닐링	641	0.15
1100-O Al	179	0.20
2024-T4 Al	690	0.16
6061-O Al	207	0.20
6061-T6 Al	414	0.05
銅, 어닐링	317	0.54
70-30 黃銅, 어닐링	896	0.49
85-15 黃銅, 냉간압연	579	0.34
304 스테인리스강, 어닐링	1276	0.45
0.6 % C강, 퀴칭-템퍼링 (538°C)	1572	0.10
0.6 % C강, 퀴칭-템퍼링 (704°C)	1227	0.19

규격 : 미국 규격



예제2-2

어떤 금속의 소성거동이 $\sigma = 700\varepsilon^{0.5}$ [MPa] 로 표시된다. 만일 이 금속봉을 $r = 0.3$ 의 단면 수축률 만큼 균일하게 냉간가공 한다면 냉간가공된 시편의 항복강도 σ_Y 는 얼마나 될까?

$$r = \frac{A_0 - A}{A_0} = 1 - \frac{A}{A_0} \quad LA = L_0A_0, \quad \frac{A}{A_0} = \frac{L_0}{L}$$

$$r = 1 - \frac{L_0}{L} \quad \rightarrow \quad \frac{L}{L_0} = \frac{1}{1 - r}$$

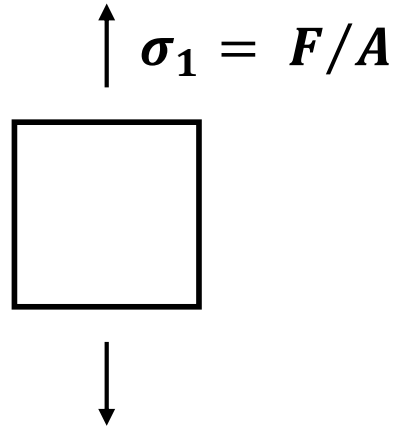
$$\varepsilon = \ln \frac{L}{L_0} = \ln\left(\frac{1}{1 - r}\right) = \ln\left(\frac{1}{1 - 0.3}\right) = 0.35667 \dots$$

$$\sigma_Y = \sigma = 700\varepsilon^{0.5} = 700(0.35667)^{0.5} = 418.052 \dots = \mathbf{418.05 \text{ MPa}}$$



2.3 항복조건, 2.4 복합응력시험, 2.5 항복곡면

- 1축 인장 상태에서의 항복조건



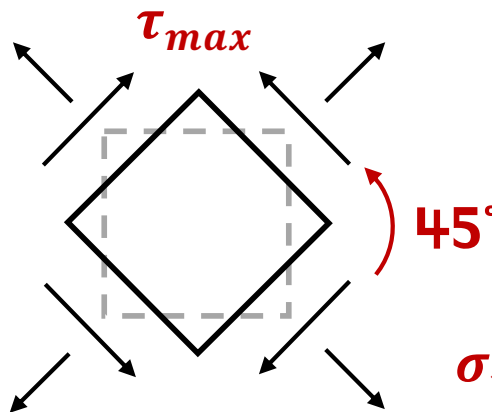
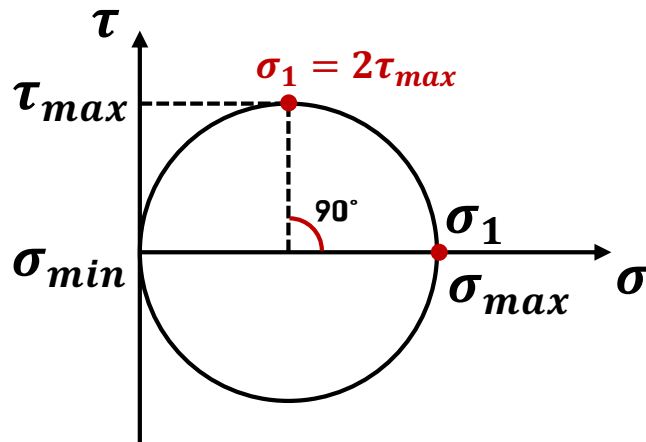
$$\begin{aligned}\sigma_1 &= F/A \\ \sigma_2 &= 0 \\ \sigma_3 &= 0\end{aligned}$$



항복이 발생하는 조건

$$f(\sigma_1) \geq C = \sigma_Y$$

$$\sigma_1 \geq \sigma_Y$$



1축 인장 에서 인장방향의
45도 방향으로 최대전단응력

$$\sigma_1 = 2\tau_{max} \geq \sigma_Y$$

$$\sigma_{max} - \sigma_{min} = 2\tau_{max} \geq \sigma_Y$$

2.3 항복조건, 2.4 복합응력시험, 2.5 항복곡면

- Tresca 항복조건 (최대전단응력 항복조건)
 - 최대전단응력이 어떠한 한계값, 즉 전단항복응력 k 에 이르면 항복

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = k$$

τ_{max} : 최대전단응력
 $\sigma_{max}, \sigma_{min}$: 주응력 (최대, 최소)

- 최대전단응력 항복조건에서는 최대 및 최소 주응력만이 고려되고,
- 중간응력은 전혀 고려되지 않는다.



2.3 항복조건, 2.4 복합응력시험, 2.5 항복곡면

- Tresca 항복조건 (최대전단응력 항복조건)
 - 최대전단응력이 어떠한 한계값, 즉 전단항복응력 k 에 이르면 항복

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} = k$$

τ_{max} : 최대전단응력

σ_I, σ_{II} : 주응력 (최대, 최소)

1축 인장 인경우,

$$\sigma_I = \sigma_Y \quad \sigma_{II} = \sigma_{III} = 0 \quad \rightarrow k = \sigma_Y/2$$

$$\sigma_I - \sigma_{II} = \sigma_Y = 2k$$

- 최대전단응력 항복조건에서는 최대 및 최소 주응력만이 고려되고,
- 중간응력은 전혀 고려되지 않는다.

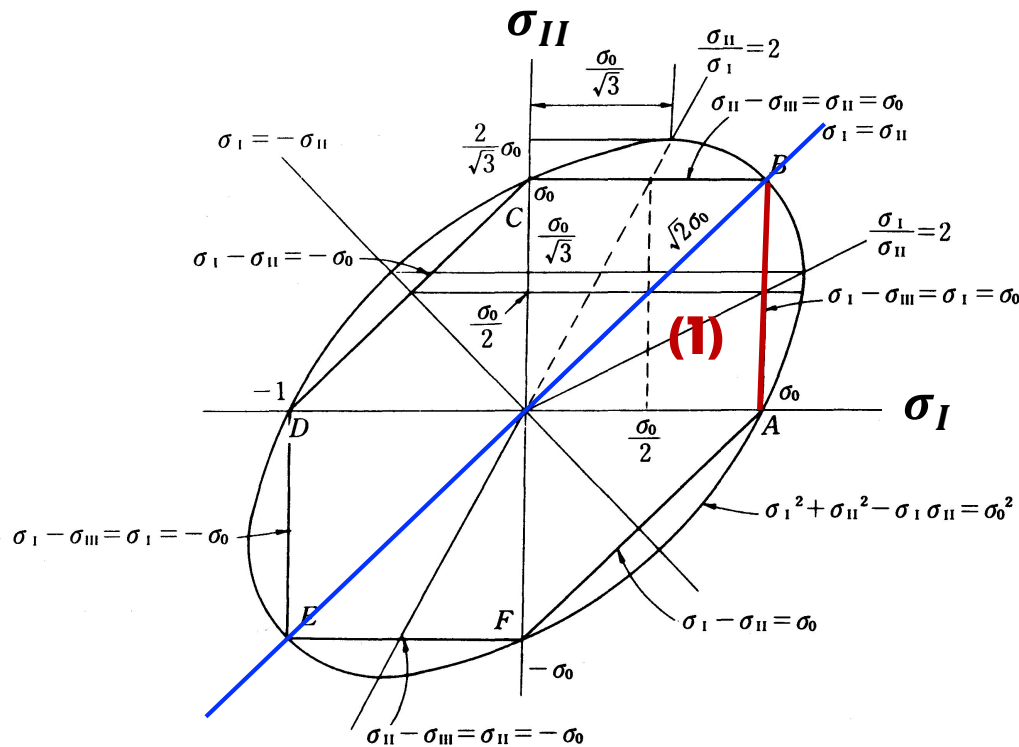


2.3 항복조건, 2.4 복합응력시험, 2.5 항복곡면

- Tresca 항복조건 (최대전단응력 항복조건)

$$\sigma_{max} - \sigma_{min} = \sigma_I - \sigma_{II} = \sigma_Y$$

- 응력들의 부호와 크기에 따라 서로 다른 6개의 식을 가질 수 있음.



(I) $\sigma_I > \sigma_{II} > 0, \sigma_{III} = 0$

$$\sigma_{max} = \sigma_I$$

$$\sigma_{min} = 0$$

$$\sigma_I - 0 = \sigma_Y$$

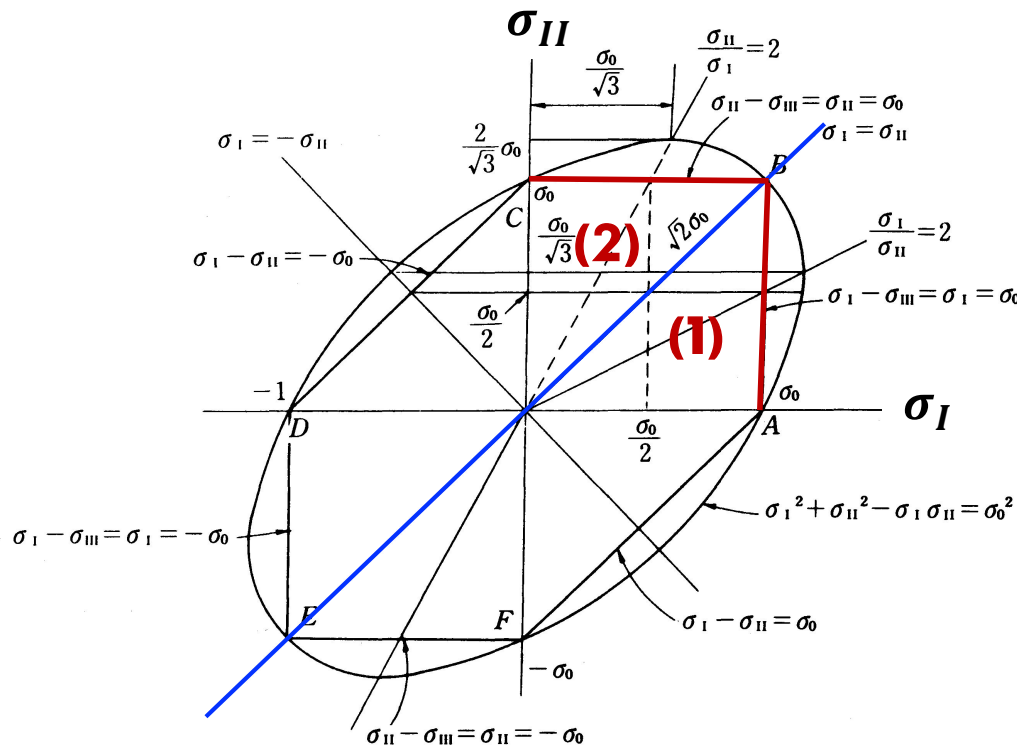


2.3 항복조건, 2.4 복합응력시험, 2.5 항복곡면

- Tresca 항복조건 (최대전단응력 항복조건)

$$\sigma_{max} - \sigma_{min} = \sigma_I - \sigma_{II} = \sigma_Y$$

- 응력들의 부호와 크기에 따라 서로 다른 6개의 식을 가질 수 있음.



$$(2) \sigma_{II} > \sigma_I > 0, \sigma_{III} = 0$$

$$\sigma_{max} = \sigma_{II}$$

$$\sigma_{min} = 0$$

$$\sigma_{II} - 0 = \sigma_Y$$

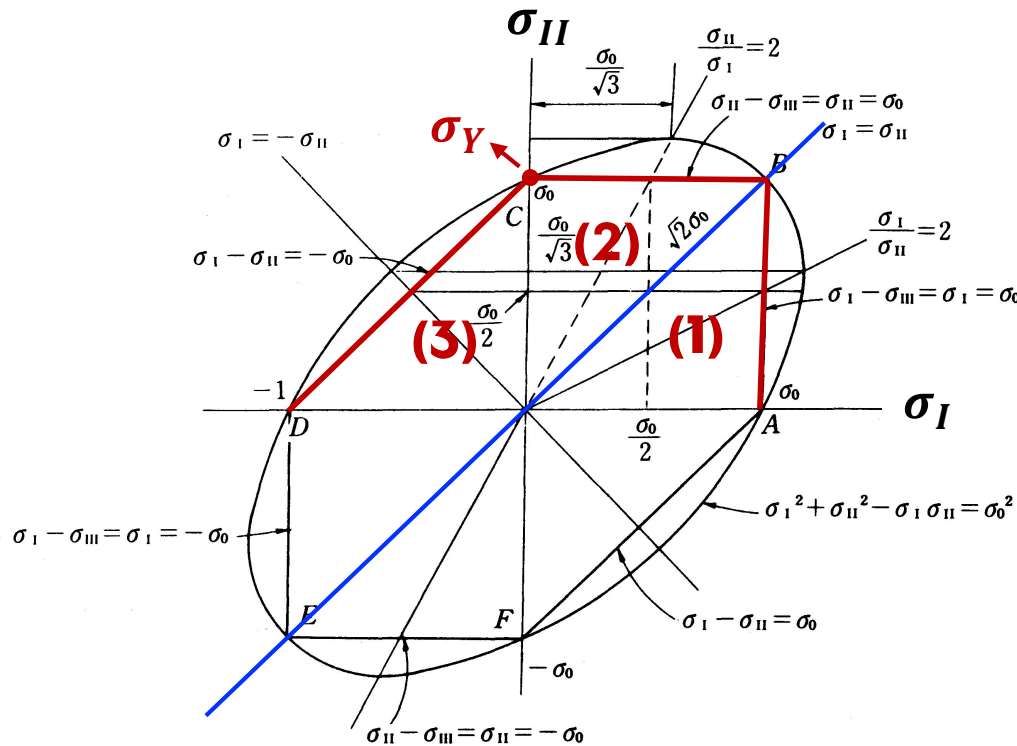


2.3 항복조건, 2.4 복합응력시험, 2.5 항복곡면

- Tresca 항복조건 (최대전단응력 항복조건)

$$\sigma_{max} - \sigma_{min} = \sigma_I - \sigma_{II} = \sigma_Y$$

- 응력들의 부호와 크기에 따라 서로 다른 6개의 식을 가질 수 있음.



(3) $\sigma_{II} > 0 > \sigma_I, \sigma_{III} = 0$

i) $|\sigma_{II}| > |\sigma_I|$

$$\sigma_{max} = \sigma_{II}$$

$$\sigma_{min} = \sigma_I$$

$$|\sigma_{II} - \sigma_I| = \sigma_Y$$

$$\sigma_{II} - \sigma_I = \sigma_Y$$

$$\therefore \sigma_{II} = \sigma_I + \sigma_Y$$

ii) $|\sigma_I| > |\sigma_{II}|$

$$\sigma_{max} = \sigma_I$$

$$\sigma_{min} = \sigma_{II}$$

$$|\sigma_I - \sigma_{II}| = \sigma_Y$$

$$\sigma_I - \sigma_{II} = -\sigma_Y$$

$$\therefore \sigma_{II} = \sigma_I + \sigma_Y$$

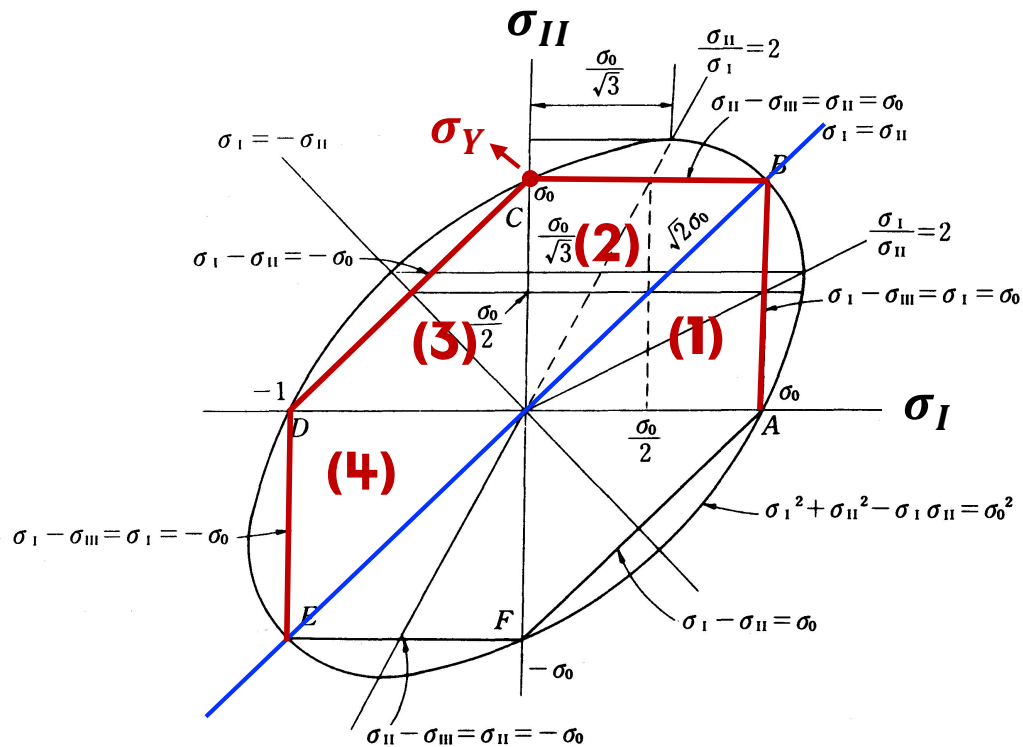


2.3 항복조건, 2.4 복합응력시험, 2.5 항복곡면

- Tresca 항복조건 (최대전단응력 항복조건)

$$\sigma_{max} - \sigma_{min} = \sigma_I - \sigma_{II} = \sigma_Y$$

- 응력들의 부호와 크기에 따라 서로 다른 6개의 식을 가질 수 있음.



$$(4) \quad 0 > \sigma_{II} > \sigma_I, \quad \sigma_{III} = 0$$

$$\sigma_{max} = \sigma_I$$

$$\sigma_{min} = 0$$

$$|\sigma_I| = \sigma_Y$$

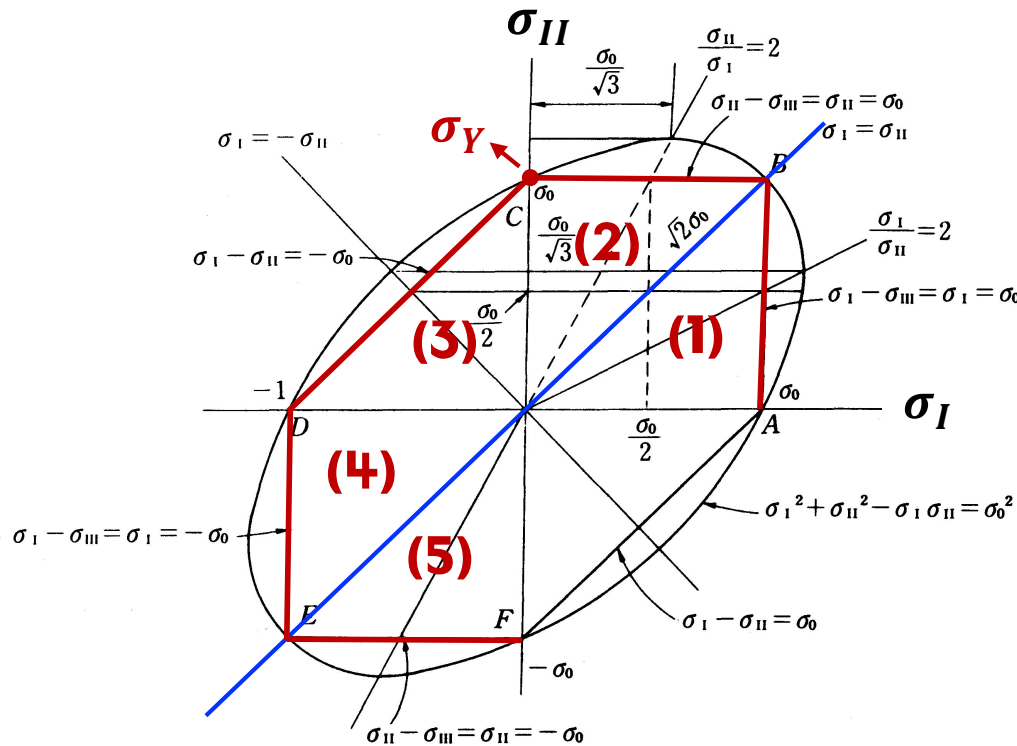
$$\sigma_I = -\sigma_Y$$

2.3 항복조건, 2.4 복합응력시험, 2.5 항복곡면

- Tresca 항복조건 (최대전단응력 항복조건)

$$\sigma_{max} - \sigma_{min} = \sigma_I - \sigma_{II} = \sigma_Y$$

- 응력들의 부호와 크기에 따라 서로 다른 6개의 식을 가질 수 있음.



$$(5) \quad 0 > \sigma_I > \sigma_{II}, \quad \sigma_{III} = 0$$

$$\sigma_{max} = \sigma_{II}$$

$$\sigma_{min} = 0$$

$$|\sigma_{II}| = \sigma_Y$$

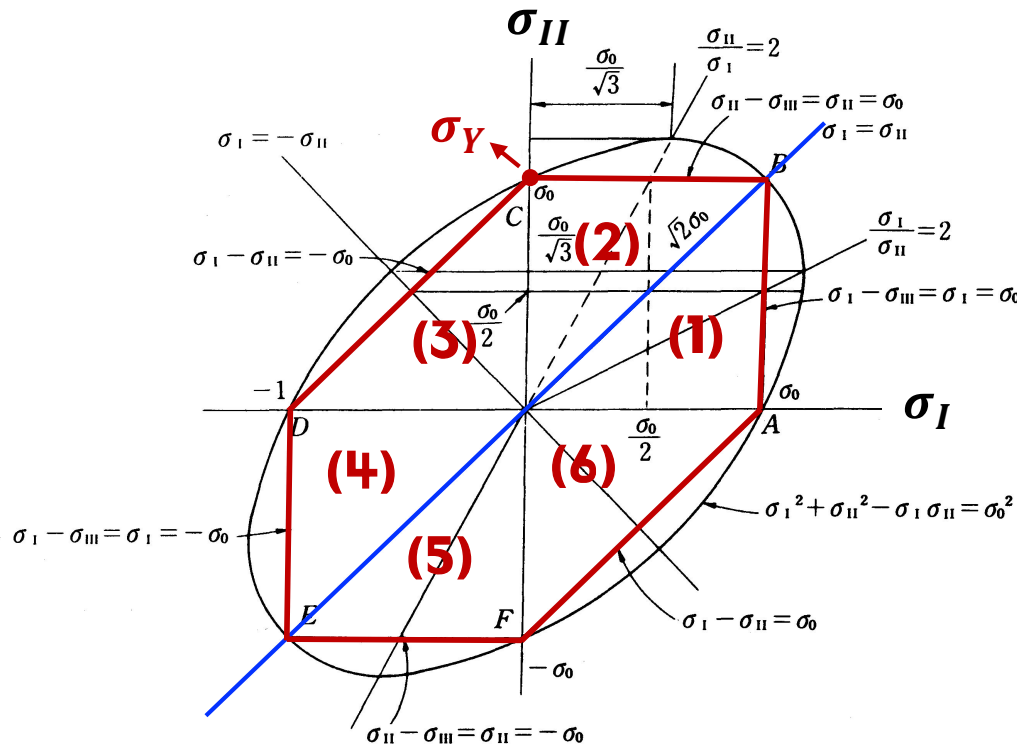
$$\sigma_{II} = -\sigma_Y$$

2.3 항복조건, 2.4 복합응력시험, 2.5 항복곡면

- Tresca 항복조건 (최대전단응력 항복조건)

$$\sigma_{max} - \sigma_{min} = \sigma_I - \sigma_{II} = \sigma_Y$$

- 응력들의 부호와 크기에 따라 서로 다른 6개의 식을 가질 수 있음.



$$(6) \sigma_I > 0 > \sigma_{II}, \sigma_{III} = 0$$

$$i) |\sigma_I| > |\sigma_{II}|$$

$$\sigma_{max} = \sigma_I$$

$$\sigma_{min} = \sigma_{II}$$

$$|\sigma_I - \sigma_{II}| = \sigma_Y$$

$$\sigma_I - \sigma_{II} = \sigma_Y$$

$$\therefore \sigma_{II} = \sigma_I - \sigma_Y$$

$$ii) |\sigma_{II}| > |\sigma_I|$$

$$\sigma_{max} = \sigma_{II}$$

$$\sigma_{min} = \sigma_I$$

$$|\sigma_{II} - \sigma_I| = \sigma_Y$$

$$\sigma_{II} - \sigma_I = -\sigma_Y$$

$$\therefore \sigma_{II} = \sigma_I - \sigma_Y$$



2.3 항복조건, 2.4 복합응력시험, 2.5 항복곡면

- Von Mises 항복조건 (최대전단에너지 항복조건)
 - 소재의 최대 전단 에너지량이 1축 인장에서 최대 전단에너지와 같을 때 항복이 일어남.

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 = C = 2\sigma_Y^2$$

- 여전히 주응력들의 차이가 항복조건에 영향을 줌
- 그러나, 최대 최소 뿐만 아니라 중간 값도 영향을 줌
- 실험과 가장 잘 일치
- 평면 응력 상태일때 ($\sigma_{III} = 0$),

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 = 2\sigma_Y^2$$

$$(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II})^2 + (\sigma_I)^2 = 2\sigma_Y^2$$

$$(\sigma_I)^2 - \sigma_I\sigma_{II} + (\sigma_{II})^2 = \sigma_Y^2$$



2.3 항복조건, 2.4 복합응력시험, 2.5 항복곡면

- Von Mises 항복조건이 전반적으로 정확하게 파손을 예측
- 설계 목적으로는 Tresca 이론이 사용이 편의, 결과도 보수적

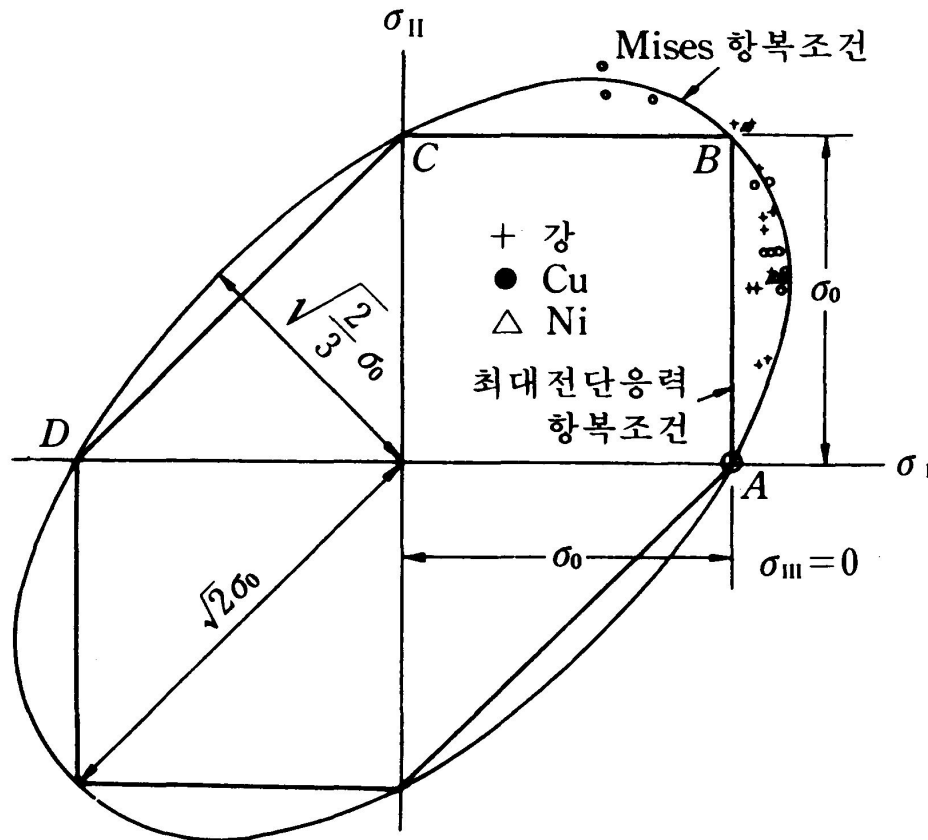


그림 2-11 항복조건 이론값과 실험값과의 비교⁽⁵⁾

예제)

평면 응력 상태에 있는 부품의 한 지점에서의 응력성분이 $\sigma_x = 80 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 40 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = 40 \text{ MPa}$ 로 주어졌을 때 a) Tresca 기준 b) von Mises 기준을 각각 사용하여 부품의 파손 여부와 안전계수를 계산 하시오. 단, 항복강도는 $\sigma_Y = 95 \text{ MPa}$ 이다.

$$\sigma_I - \sigma_{II} = \sigma_Y \quad FS = \frac{\sigma_Y}{|\sigma_I - \sigma_{II}|} \quad FS = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{(\sigma_I)^2 - \sigma_I \sigma_{II} + (\sigma_{II})^2}}$$
$$(\sigma_I)^2 - \sigma_I \sigma_{II} + (\sigma_{II})^2 = \sigma_Y^2$$

$$\begin{aligned} \sigma_{I,II} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ &= \frac{80+40}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{80-40}{2}\right)^2 + (40)^2} \\ &= 60 \pm \sqrt{1600} = 60 \pm 44.72 \\ &= 104.72 \text{ or } 15.28 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\sigma_{III} = 0 \text{ MPa}$$



예제)

$$FS = \frac{\sigma_Y}{|\sigma_I - \sigma_{II}|} \quad FS = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{(\sigma_I)^2 - \sigma_I\sigma_{II} + (\sigma_{II})^2}}$$

a) Tresca

$$FS = \frac{95}{|104.72 - 0|} = 0.91 \quad (\text{파손 0})$$

b) Von Mises

$$FS = \frac{95}{\sqrt{(104.72)^2 - 104.72 \times 0 + (0)^2}} = 0.91 \quad (\text{파손 0})$$

