재료강도학-강의자료

제1장 탄성

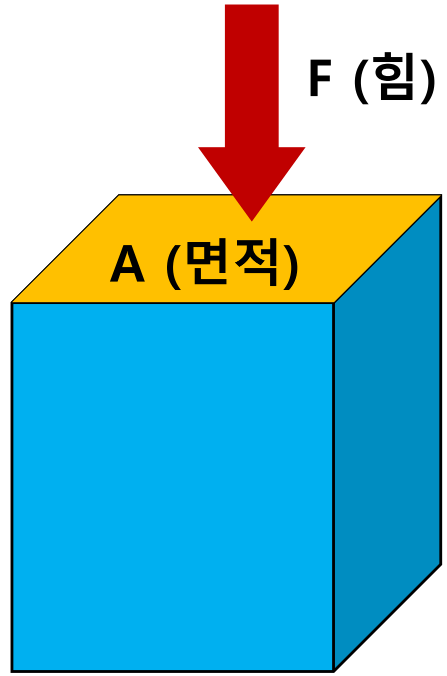
한밭대학교 신소재공학과 신기현

TheMAD

1.1 응력의 개념

응력 (stress) 의 정의: **단위면적 당 힘의 세기**

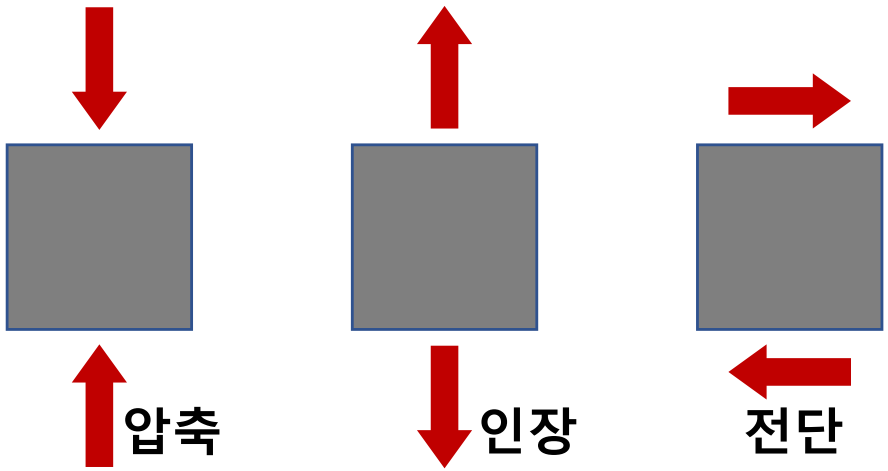
응력의 단위 : N/m^2 = Pa (파스칼)



- 수직응력(Normal stress, σ)
  :면에 법선(normal)으로 작용하는 응력
  (압축응력, 인장응력)

- 전단응력(Shear stress, τ)
  :면에 수평(parallel)으로 작용하는 응력

$$\sigma = \frac{F}{A}$$



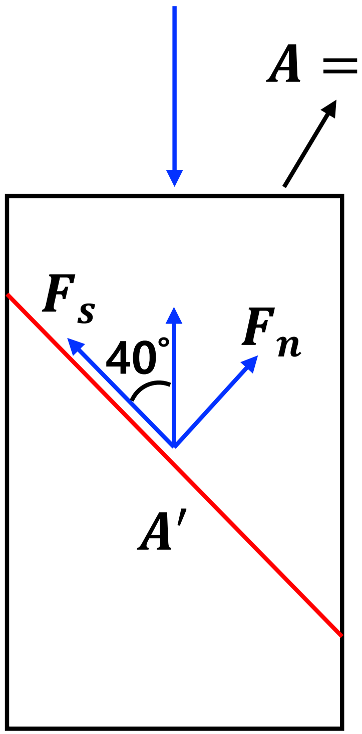
TheMAD

예제 1-1)

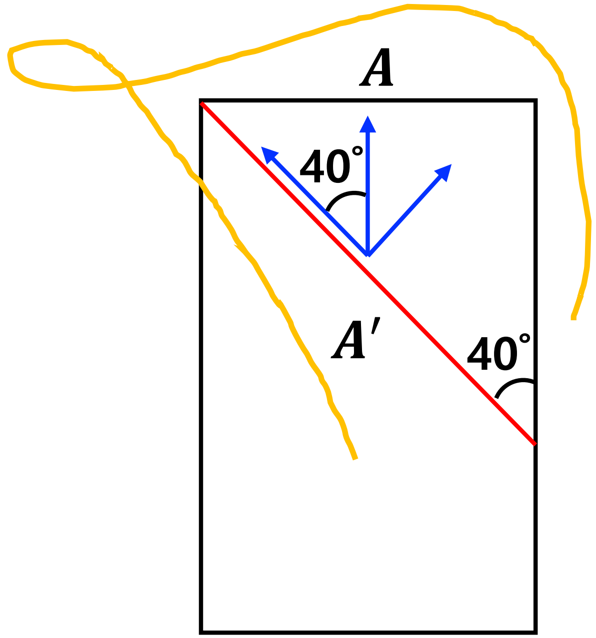
지름이 10 mm 인 봉의 축방향으로 4 kN의 힘이 작용할 때 축과 40°를 이루는 면에 작용하는 수직응력과 전단응력을 계산하라.

$F = 4kN$

$A = \pi r^2$



$A' = A/\sin\theta$

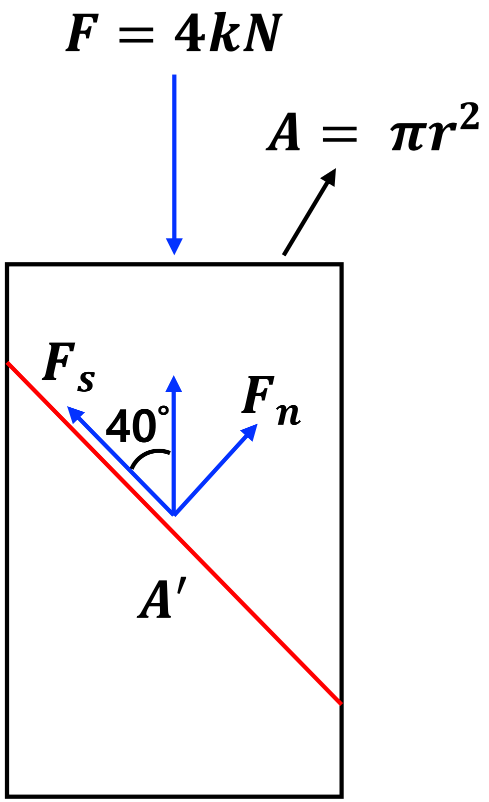


$\dfrac{A}{A'} = \sin\theta$

TheMAD

예제 1-1)

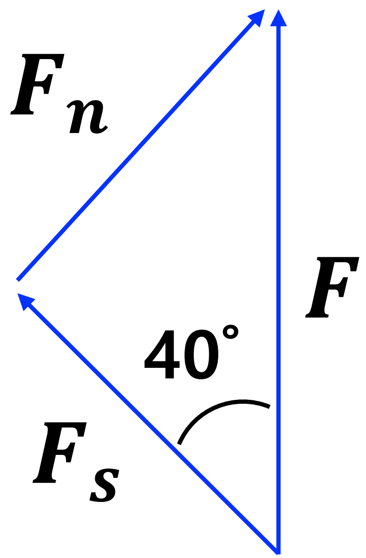
지름이 10 mm 인 봉의 축방향으로 4 kN의 힘이 작용할 때 축과 40°를 이루는 면에 작용하는 수직응력과 전단응력을 계산하라.



$$A' = A/\sin\theta$$

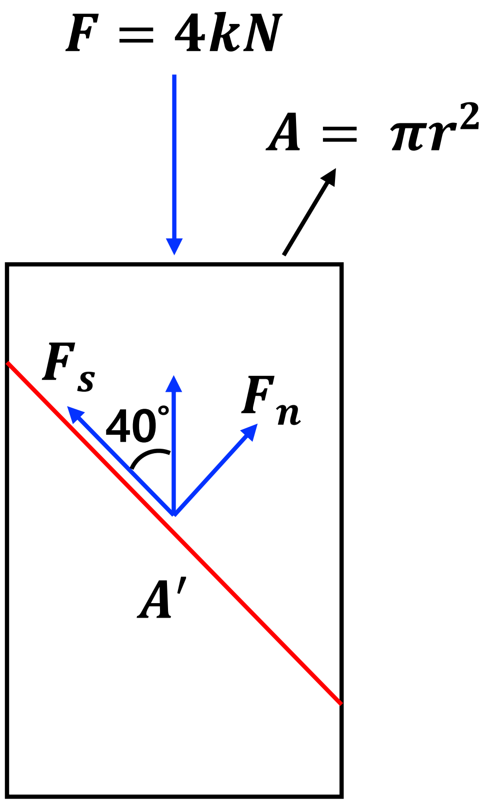
$$F_n = F\sin\theta$$

$$F_s = F\cos\theta$$



예제 1-1)

지름이 10 mm 인 봉의 축방향으로 4 kN의 힘이 작용할 때 축과 40°를 이루는 면에 작용하는 수직응력과 전단응력을 계산하라.



$$A' = A/\sin\theta$$

$$F_n = F\sin\theta$$

$$F_s = F\cos\theta$$

$$F = 4,000\ N$$

$$A = 3.14\times(0.005\ m)^2 = 0.0000785\ m^2 = 7.85\times10^{-5}\ m^2$$

$$\sigma = \sigma_n = \frac{F_n}{A'} = \frac{F\sin\theta}{A/\sin\theta} = \frac{F}{A}(\sin\theta)^2 = \sigma(\sin\theta)^2$$

$$\tau = \sigma_s = \frac{F_s}{A'} = \frac{F\cos\theta}{A/\sin\theta} = \frac{F}{A}\cos\theta\sin\theta = \sigma\cos\theta\sin\theta$$

예제 1-1)

지름이 10 mm 인 봉의 축방향으로 4 kN의 힘이 작용할 때 축과 40°를 이루는 면에 작용하는 수직응력과 전단응력을 계산하라.

$$\sigma_n = \frac{F_n}{A'} = \frac{F\sin\theta}{A/\sin\theta} = \frac{F}{A}(\sin\theta)^2 = \sigma(\sin\theta)^2$$

$$F = 4,000\ N$$

$$A = 3.14\times(0.005\ m)^2 = 0.0000785\ m^2$$

$$= \frac{F}{A}(\sin\theta)^2 = \frac{4000\times(\sin 40^\circ)^2}{0.0000785}$$

$$= 21053549.61358139\ \ldots\ N/m^2$$

$$= 21053549.61\ N/m^2$$

$$= 2.11\times10^7\ N/m^2$$

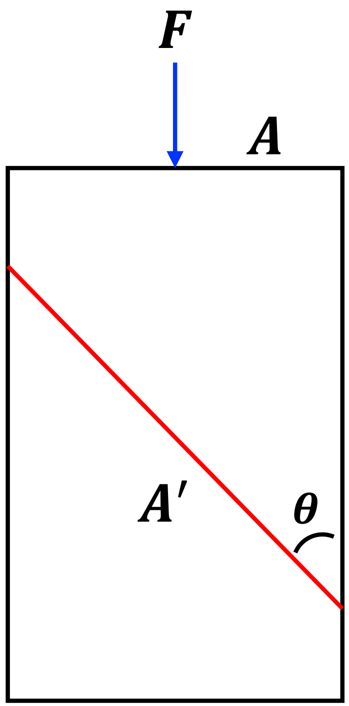
$$= 2.11\times10^7\ Pa$$

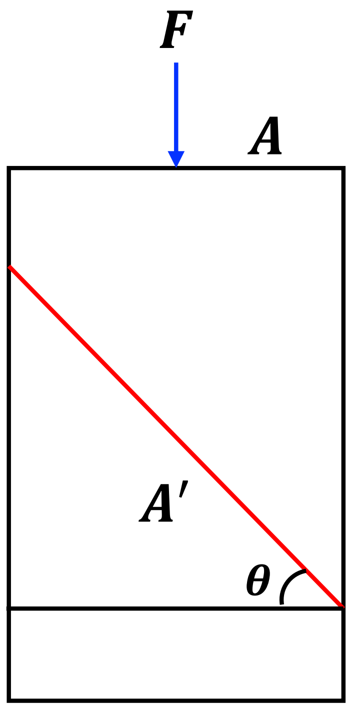
$$= 2.11\times10^1\ MPa$$

$$= 21.05\times10^6\ N/m^2 = 21.05\times10^6\ Pa = 21.05\ MPa$$

TheMAD

이런 상황이라면 ?





$$\sigma_n = \boldsymbol{\sigma}(\sin\theta)^2$$

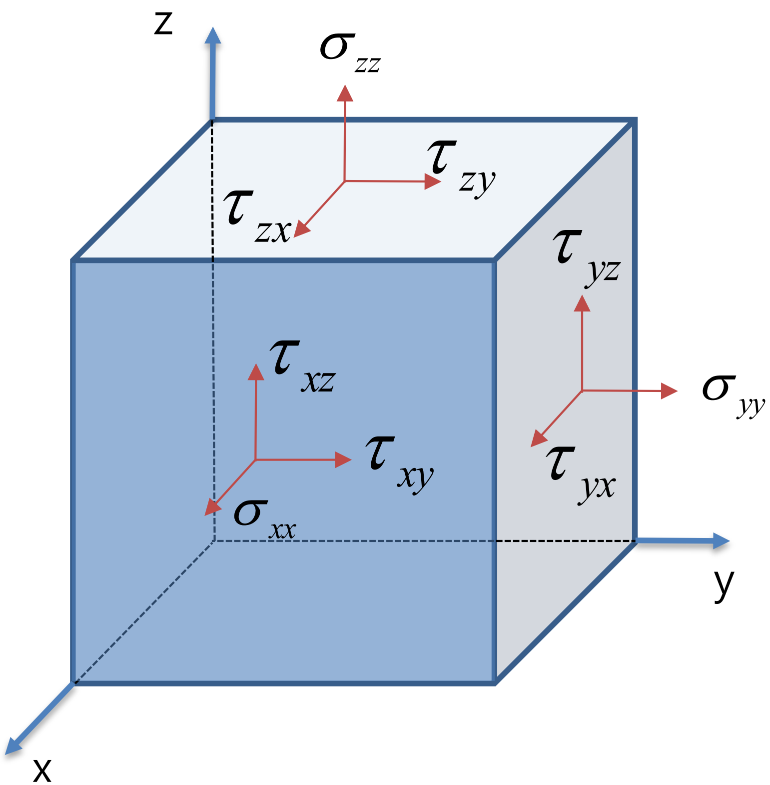
$$\sigma_s = \boldsymbol{\sigma}\cos\theta\sin\theta$$

$$\sigma_n = ???$$

$$\sigma_s = ???$$

1.2 응력텐서

- 외력을 받고 평형을 유지하고 있는 물체 내의 매우 작은 하나의 미소입방체를 고려한다.
- 각 면에 작용하는 응력에는 1개의 수직응력과 2개의 전단응력이 작용



우리가 다루는 것은 '정역학'

- 3개 평면의 응력만 고려 (∵ 힘의 평형)
- $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ (∵ 모멘텀의 평형)
- 6개의 응력성분만 구하면 됨
- 하지만, 대부분 2차원에서 고려하기 때문에 4개 성분 중 3개만 알면 됨.

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

1.4 주응력 (Principal stress)

- 응력은 각도 θ의 함수

$$\begin{bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos^2\theta & sin^2\theta & 2sin\theta cos\theta \\ sin^2\theta & cos^2\theta & -2sin\theta cos\theta \\ -sin\theta cos\theta & sin\theta cos\theta & cos^2\theta - sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

$$sin2\theta = 2sin\theta cos\theta$$

$$cos2\theta = cos^2\theta - sin^2\theta$$

$$cos^2\theta = \frac{1 + cos2\theta}{2}$$

$$sin^2\theta = \frac{1 - cos2\theta}{2}$$

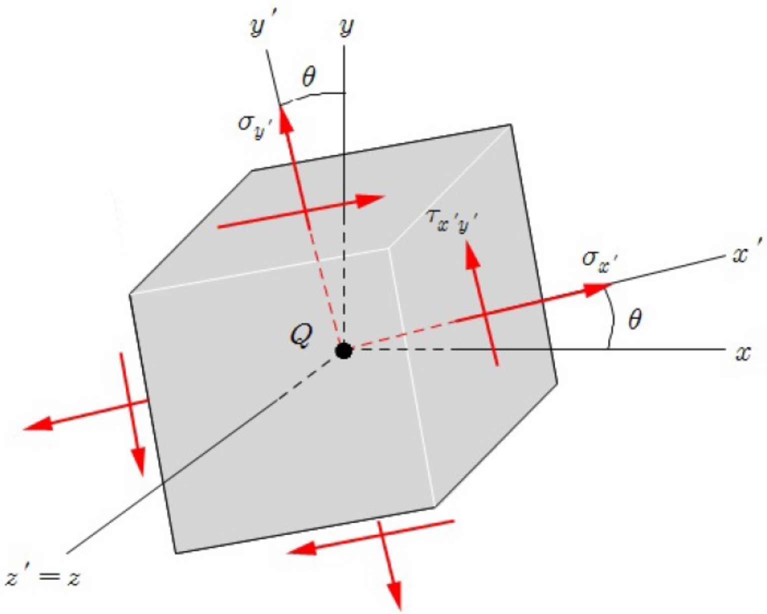
$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} cos2\theta + sin2\theta \cdot \tau_{xy}$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} cos2\theta - sin2\theta \cdot \tau_{xy}$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} sin2\theta + cos2\theta \cdot \tau_{xy}$$

1.4 주응력 (Principal stress)

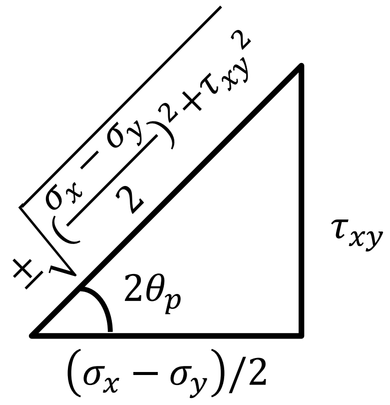
- 응력은 각도 θ의 함수
- 각도의 변화에 따라 '극댓값' 또는 '극솟값'을 가짐
- 수직응력이 최대 혹은 최소가 되는 평면 = 주평면 (Principal plane)
- 이때의 수직응력을 주응력이라고 하고, 전단응력은 0임
- θ로 미분하고, 미분값을 0으로 두면,



$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + {\tau_{xy}}^2}$$

$$tan2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)}$$

1.4 주응력 (Principal stress)



$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x-\sigma_y)}$$

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta + \sin 2\theta \cdot \tau_{xy}$$

$$= \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta + \sin 2\theta \cdot \tau_{xy}$$

$$= \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2} \cdot \frac{(\sigma_x-\sigma_y)/2}{\pm\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+{\tau_{xy}}^2}} + \frac{\tau_{xy}}{\pm\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+{\tau_{xy}}^2}} \cdot \tau_{xy}$$

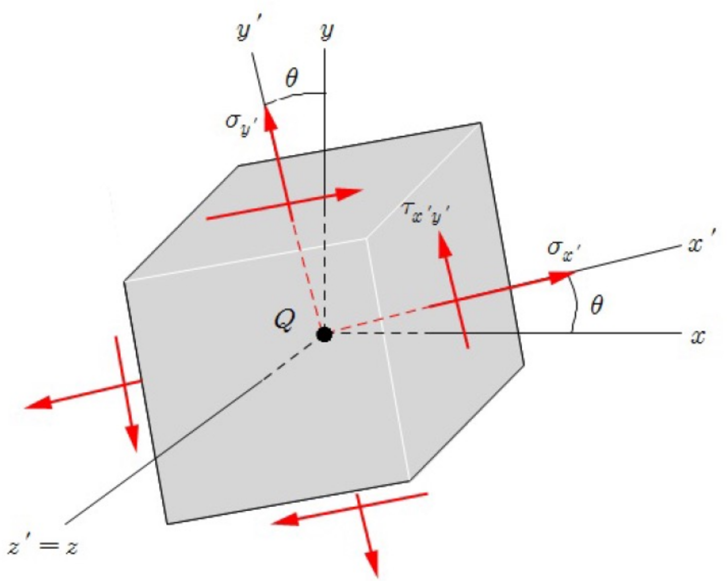
$$= \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + (\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2 \cdot \frac{1}{\pm\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+{\tau_{xy}}^2}} + \frac{1}{\pm\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+{\tau_{xy}}^2}} \cdot {\tau_{xy}}^2$$

$$= \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \left(\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + {\tau_{xy}}^2\right) \cdot \frac{1}{\pm\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+{\tau_{xy}}^2}}$$

$$= \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+{\tau_{xy}}^2}$$

1.5 최대전단응력

- 최대전단응력 = 전단응력에 대하여 위와 유사하게 계산



$$\tau_{max} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + {\tau_{xy}}^2}$$

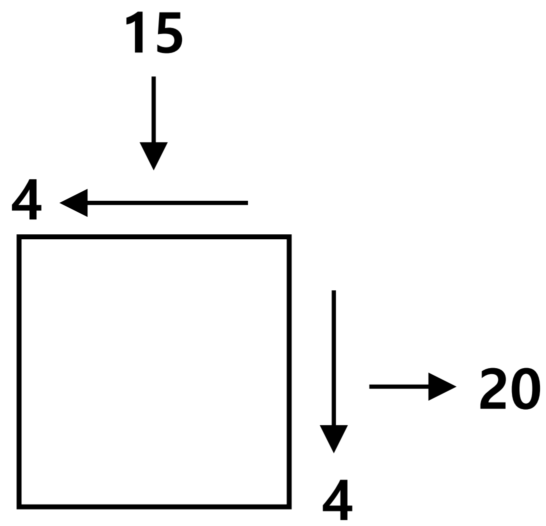
$$tan2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

 TheMAD

예제 1-3

x_1x_2면의 응력상태가 다음과 같다. x_1x_2면에서의 주응력의 크기와 방향을 결정하라.

$$\sigma = \begin{bmatrix} 20 & -4 \\ -4 & -15 \end{bmatrix}$$



$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2})^2 + {\tau_{xy}}^2}$$

예제 1-3

x_1x_2면의 응력상태가 다음과 같다. x_1x_2면에서의 주응력의 크기와 방향을 결정하라.

$$\sigma_p = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + {\tau_{xy}}^2} \qquad \sigma = \begin{bmatrix} 20 & -4 \\ -4 & -15 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{20 + (-15)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{20 - (-15)}{2}\right)^2 + (-4)^2}$$

$$= 2.5 \pm \sqrt{322.25} = 2.5 \pm 17.9513230 \ \ldots$$

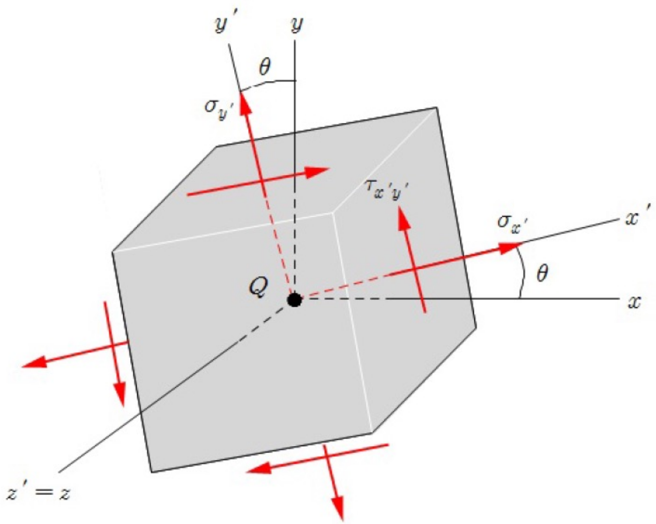
$$\sigma_1 = 20.45 \qquad and \qquad \sigma_2 = -15.45$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \times (-4)}{20 - (-15)} = -0.22857 \ \ldots$$

$$2\theta_p = -12.87492377^\circ \qquad \theta_p = -6.44^\circ \ and \ 83.56^\circ$$

1.6 2차원의 Mohr 원

- 이렇게 각도에 따라서 수직응력과 전단응력이 변화한다면 그림을 그릴 수 있지 않을까 ?



$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} cos2\theta + sin2\theta \cdot \tau_{xy}$$

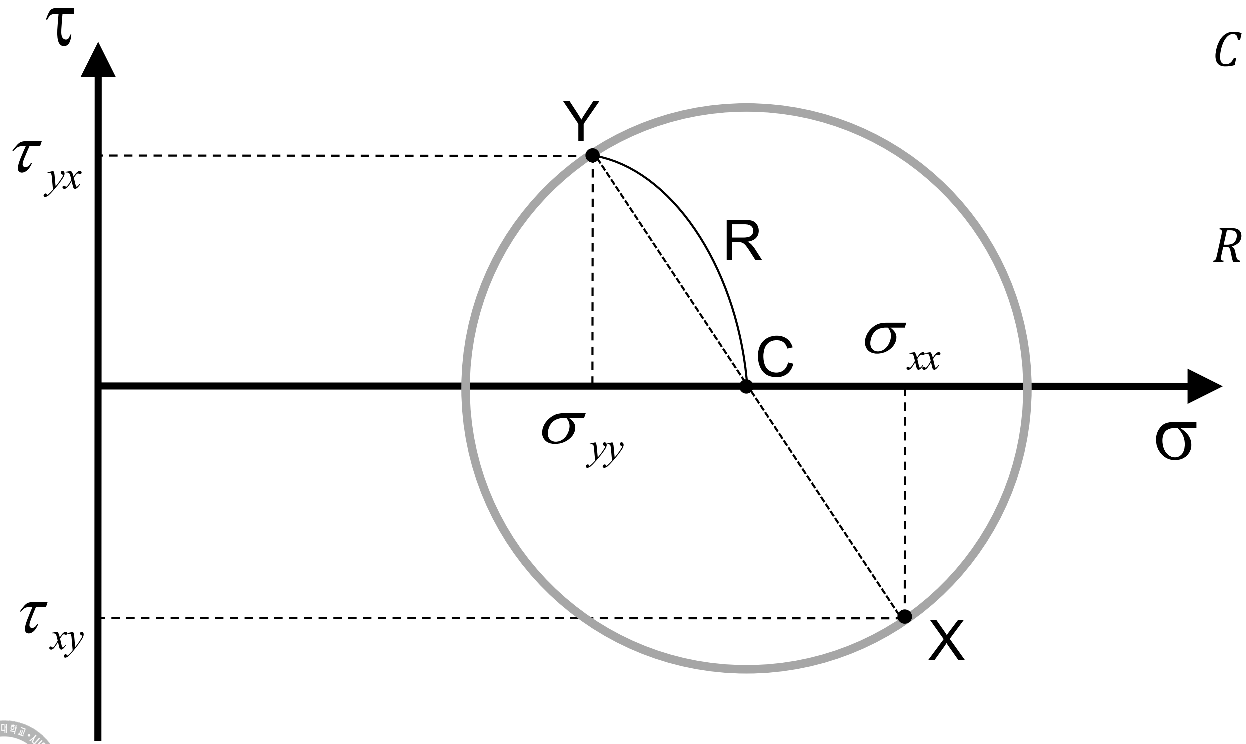
$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} cos2\theta - sin2\theta \cdot \tau_{xy}$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} sin2\theta + cos2\theta \cdot \tau_{xy}$$

1.6 2차원의 Mohr 원

기본적인 룰

1. 수직응력은 가로축에, 인장응력은 (+), 압축응력은 (–) 로 표현
2. 전단응력은 세로축에, 시계방향 회전은 (+), 반시계방향 회전은 (–) 로 표현
   (앞에서 얘기한 응력의 부호와는 다른 내용, 혼동하지 말것)
3. Mohr 원에서의 각은 실제각의 2배



$$C = \left[\frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2}, 0\right]$$

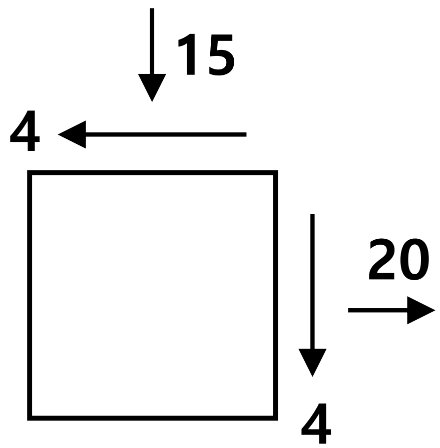
$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + {\tau_{xy}}^2}$$

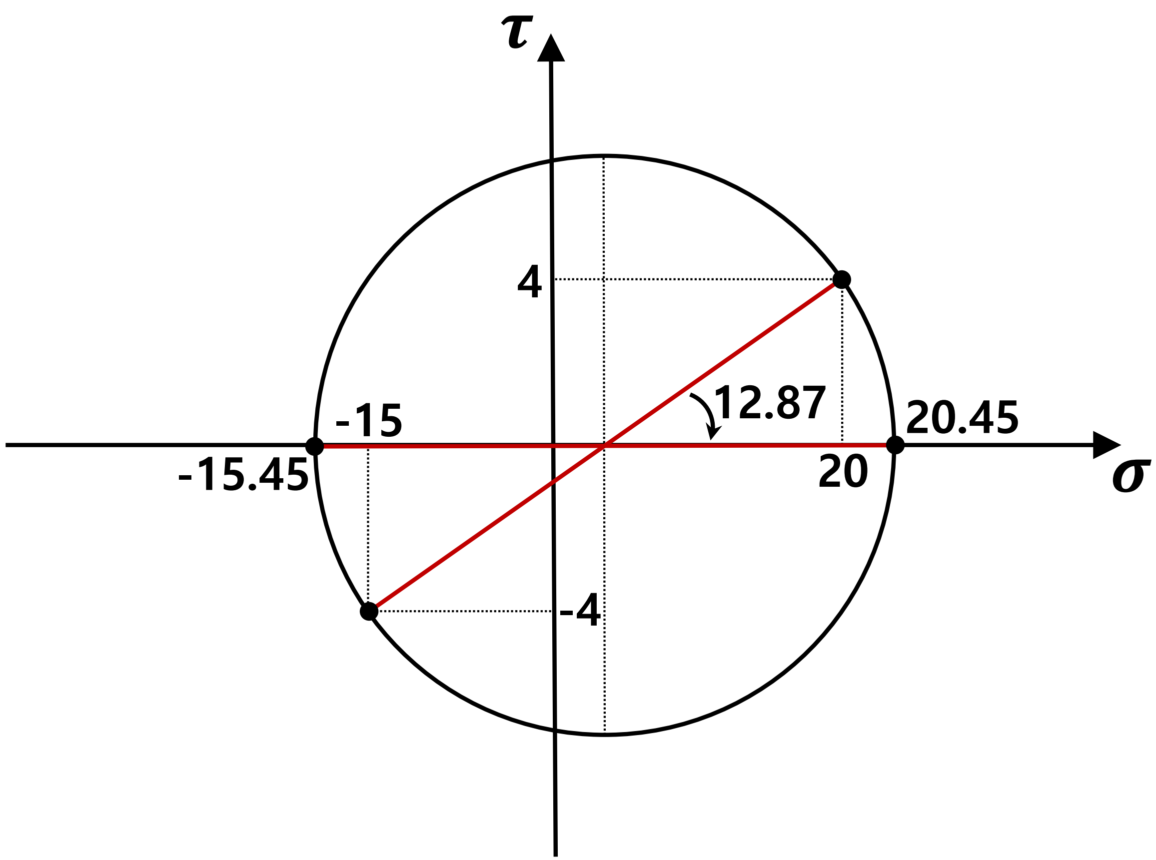
TheMAD

예제 1-7

예제 1-3의 응력상태를 Mohr 원으로 나타내라.

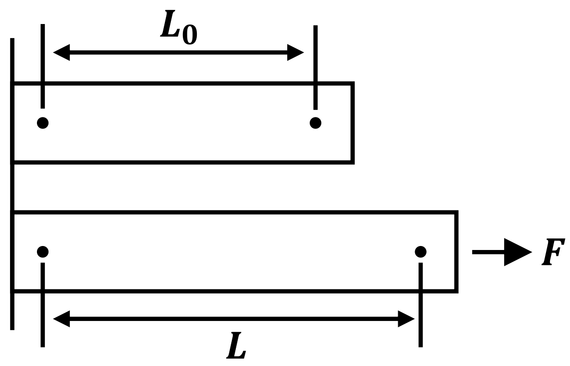
$$\sigma = \begin{bmatrix} 20 & -4 \\ -4 & -15 \end{bmatrix}$$





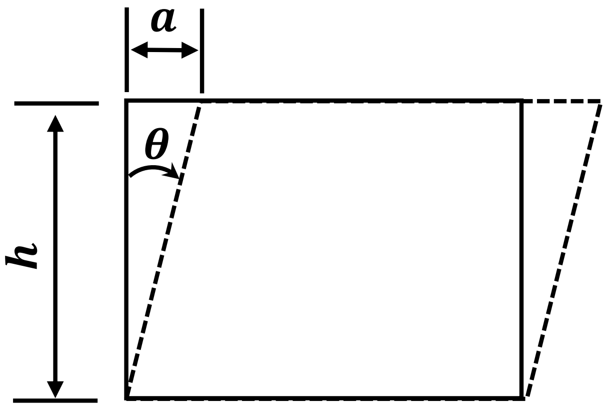
1.11 변형률의 개념

- 수직변형률 (ε)
  - 아래와 같이 시편에 힘을 가하여 길이의 변화가 일어났을 때 변형률

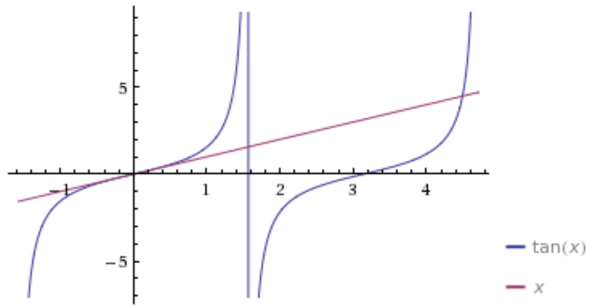


$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\Delta L}{L_0}$$

- 전단변형률 (γ)
  - 길이변화 뿐만 아니라 **각의 변화도** 일어날 수 있음.
  - 전단응력을 받아 형성된 전단변형률은 다음과 같이 정의.



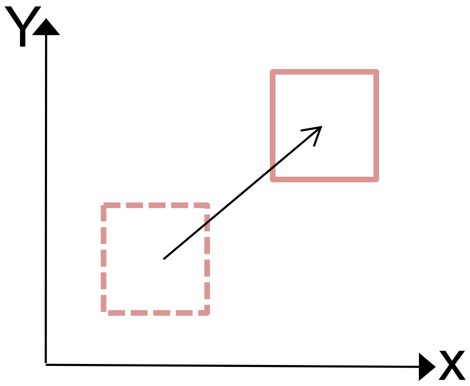
$$\gamma = \frac{a}{h} = \tan\theta \cong \theta$$



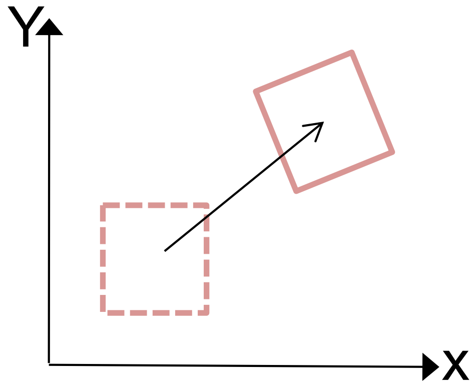
TheMAD

1.12 물체 내의 한점에서의 변형률

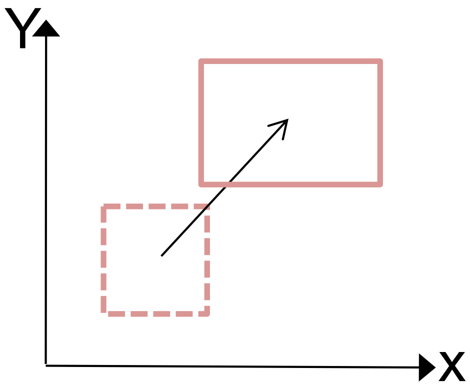
- 변위 (displacement)
  - 힘의 작용으로 야기된 물체의 변형거동을 정량적으로 표현
  - 변위의 종류



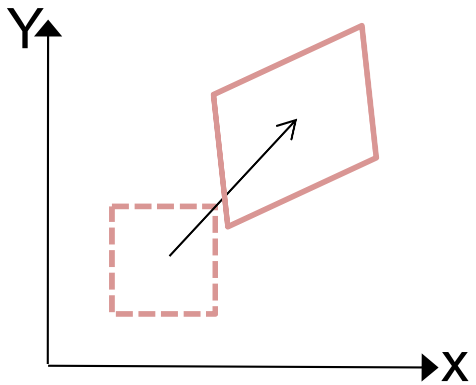
translation



translation + rigid body rotation



translation + deformation



translation + rigid body rotation
+ deformation

1.12 물체 내의 한점에서의 변형률

- 변형률텐서 역시 응력텐서와 거의 유사

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \longrightarrow \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

- 변형률 역시 각도에 따라 값이 변화함.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos^2\theta & sin^2\theta & sin\theta cos\theta \\ sin^2\theta & cos^2\theta & -sin\theta cos\theta \\ -2sin\theta cos\theta & 2sin\theta cos\theta & cos^2\theta - sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} cos2\theta + sin2\theta \cdot \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

$$\varepsilon_{y'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} cos2\theta - sin2\theta \cdot \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

$$\gamma_{x'y'} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) sin2\theta + cos2\theta \cdot \gamma_{xy}$$

1.13 주변형률

- 물체의 각도 변화에 따라 변형률이 변화
- 변형률이 최대 혹은 최소가 되는 각도(θ_p)에서의 평면 : 주평면
- 주평면에서의 변형률을 주변형률, 이때의 전단변형률은 0

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2})^2 + (\frac{\gamma_{xy}}{2})^2}$$

$$tan2\theta_P = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

1.13 주변형률

- 최대전단변형률

  - 주변형률과 동일한 방식으로 계산

$$\gamma_{max} = \pm 2\sqrt{(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2})^2 + (\frac{\gamma_{xy}}{2})^2}$$

$$tan2\theta_s = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\gamma_{xy}}$$

1.15 탄성영역에서의 응력-변형률 관계

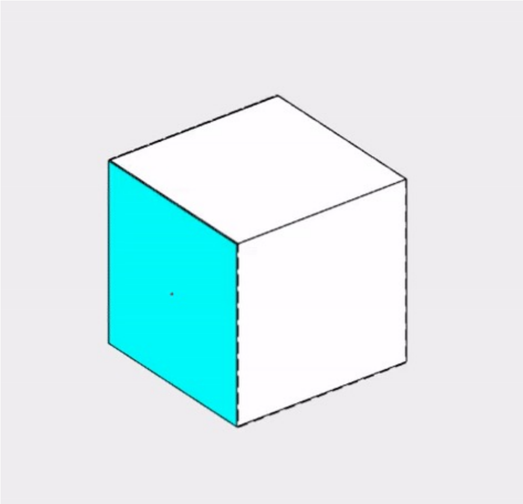
- 탄성영역에서 x축 방향으로 인장이 일어날 경우, 다음의 관계가 성립

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}$$

- E: 탄성계수, Young 계수, Young's Modulus,

- X축 방향과 수직인 y, z 축방향으로는 수축이 일어남. (일반적인 경우)
- 이때의 인장방향의 변형률과 수직방향의 변형률의 비

  = Poisson 비 (ν) , 금속의 경우 대부분 0.33 정도



$$\nu = -\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}} = -\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_{xx}}$$

$$\varepsilon_{yy} = -\nu\varepsilon_{xx} = -\frac{\nu\sigma_{xx}}{E}$$

$$\varepsilon_{zz} = -\nu\varepsilon_{xx} = -\frac{\nu\sigma_{xx}}{E}$$

1.15 탄성영역에서의 응력-변형률 관계

- **변형률 (응력) – 응력 (변형률) 의 관계**

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}\sigma_z$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_z$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z - \frac{\nu}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y$$

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)\right]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_z + \varepsilon_x)\right]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_z + \nu\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right)\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{zx}$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}$$

$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}$$

1.15 탄성영역에서의 응력-변형률 관계

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}$$

예제 1-10

구리 $(E = 123\ GPa = 12.3\times10^4\ MPa, \nu = 0.34)$가 $\sigma_{xx} = 20\ MPa$ $\sigma_{yy} = -15\ MPa, \sigma_{xy} = -4\ MPa$ 의 응력 상태에 있다면, xy면에서의 주변형률과 최대전단변형률을 계산하라.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}\sigma_{yy} \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\sigma_{yy} - \frac{\nu}{E}\sigma_{xx} \qquad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{12.3\times10^4}\times(20) - \frac{0.34}{12.3\times10^4}\times(-15) = 2.04\times10^{-4}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{12.3\times10^4}\times(-15) - \frac{0.34}{12.3\times10^4}\times(20) = -1.77\times10^{-4}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+0.34)}{12.3\times10^4}\times(-4) = -8.72\times10^{-5}$$

예제 1-10

구리 $(\boldsymbol{E = 123\ GPa = 12.3{\times}10^4\ MPa, \nu = 0.34})$가 $\boldsymbol{\sigma_{xx} = 20\ MPa}$ $\boldsymbol{\sigma_{yy} = -15\ MPa, \sigma_{xy} = -4\ MPa}$ 의 응력 상태에 있다면, xy면에서의 주변형률과 최대전단변형률을 계산하라.

$$\varepsilon_{xx} = 2.04{\times}10^{-4} \qquad \varepsilon_{yy} = -1.77{\times}10^{-4} \qquad \gamma_{xy} = -8.72{\times}10^{-5}$$

$$\varepsilon_p = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{2.04{\times}10^{-4} + (-1.77{\times}10^{-4})}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2.04{\times}10^{-4} - (-1.77{\times}10^{-4})}{2}\right)^2 + \left(\frac{-8.72{\times}10^{-5}}{2}\right)^2}$$

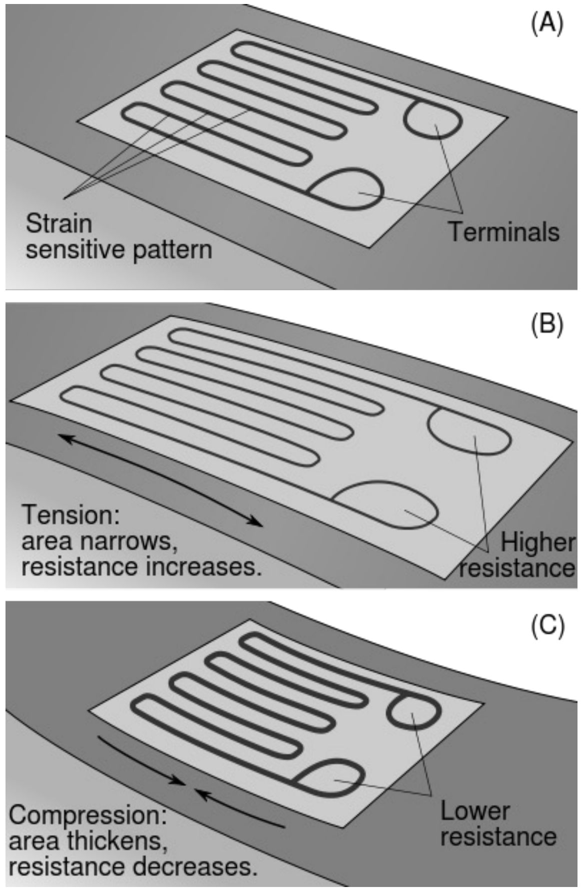
$$= 1.35{\times}10^{-5} \pm \sqrt{3.63{\times}10^{-8} + 1.90{\times}10^{-9}}$$

$$= 1.35{\times}10^{-5} \pm 1.95{\times}10^{-4} = 2.09{\times}10^{-4} \quad \text{or} \quad -1.82{\times}10^{-4}$$

$$\gamma_{max} = 2 \times \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} = 3.90{\times}10^{-4}$$

1.16 표면의 응력과 변형률의 측정방법

- 응력은 실제로 측정하기 어려움
- 주로 변형률을 측정하려 응력을 계산
- 변형률 게이지 (Strain gauge) 주로 사용

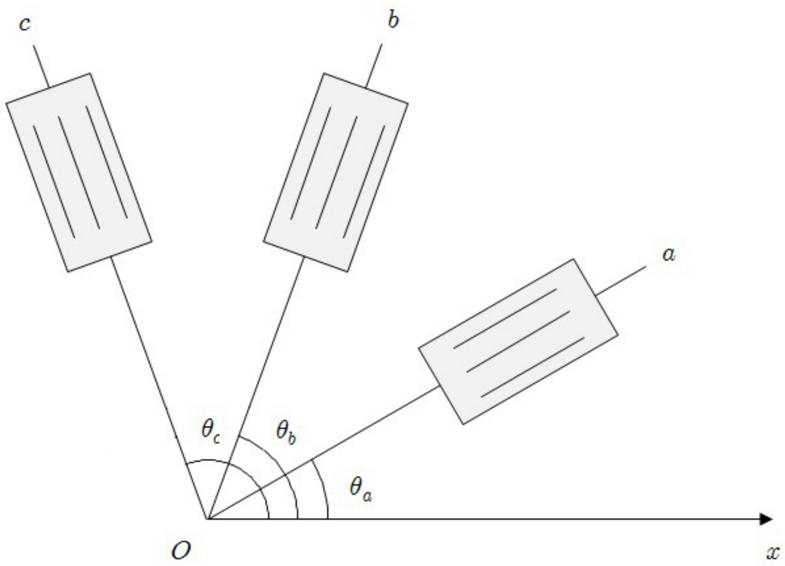


재료의 변형에 따라서 변형률 게이지의
금속선 패턴의 두께가 달라지고, 저항이 달라짐
이를 기반으로 변형률을 정확하게 측정

3개의 strain 게이지를 활용하여
$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \tau_{xy}$ 를 모두 측정 가능
(미지수 3개, 방정식 3개)

1.16 표면의 응력과 변형률의 측정방법

$$\varepsilon(\theta) = \cos^2\theta \cdot \varepsilon_x + \sin^2\theta \cdot \varepsilon_y + \sin\theta\cos\theta \cdot \gamma_{xy}$$



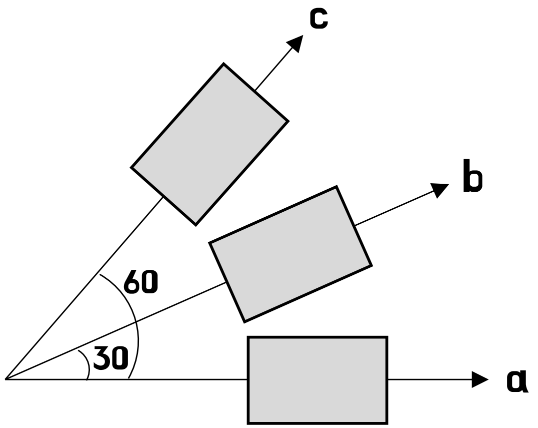
$$\varepsilon_a = \cos^2\theta_a \cdot \varepsilon_x + \sin^2\theta_a \cdot \varepsilon_y + \sin\theta_a\cos\theta_a \cdot \gamma_{xy}$$

$$\varepsilon_b = \cos^2\theta_b \cdot \varepsilon_x + \sin^2\theta_b \cdot \varepsilon_y + \sin\theta_b\cos\theta_b \cdot \gamma_{xy}$$

$$\varepsilon_c = \cos^2\theta_c \cdot \varepsilon_x + \sin^2\theta_c \cdot \varepsilon_y + \sin\theta_c\cos\theta_c \cdot \gamma_{xy}$$

예제)

세 개의 변형률 게이지가 재료 표면위에서 수평으로 부터 시계 반대 방향으로 0, 30, 60도의 각도로 각각 놓여져 있다. 각 게이지로 부터 측정된 변형률의 값이 $\varepsilon_a = 10\times10^{-6},\ \varepsilon_b = 20\times10^{-6}, \varepsilon_c = 30\times10^{-6}$**였다면 이때의 변형률을 구하고, Mohr 원을 이용하여 주 변형률의 크기와 방향을 구하라.**



$$\varepsilon_a = \cos^2\theta_a \cdot \varepsilon_x + \sin^2\theta_a \cdot \varepsilon_y + \sin\theta_a\cos\theta_a \cdot \gamma_{xy}$$

$$\varepsilon_b = \cos^2\theta_b \cdot \varepsilon_x + \sin^2\theta_b \cdot \varepsilon_y + \sin\theta_b\cos\theta_b \cdot \gamma_{xy}$$

$$\varepsilon_c = \cos^2\theta_c \cdot \varepsilon_x + \sin^2\theta_c \cdot \varepsilon_y + \sin\theta_c\cos\theta_c \cdot \gamma_{xy}$$

$$\varepsilon_a = \varepsilon_x \cos^2 0° + \varepsilon_y \sin^2 0° + \gamma_{xy} \sin 0° \cos 0° = 10\times10^{-6}$$

$$\varepsilon_b = \varepsilon_x \cos^2 30° + \varepsilon_y \sin^2 30° + \gamma_{xy} \sin 30° \cos 30° = 20\times10^{-6}$$

$$\varepsilon_c = \varepsilon_x \cos^2 60° + \varepsilon_y \sin^2 60° + \gamma_{xy} \sin 60° \cos 60° = 30\times10^{-6}$$

$$\varepsilon_a = \varepsilon_x + \cancel{\varepsilon_y \sin^2 0°} + \cancel{\gamma_{xy} \sin 0° \cos 0°} = 10\times10^{-6}$$

$$\varepsilon_b = \varepsilon_x(3/4) + \varepsilon_y(1/4) + \gamma_{xy}(\sqrt{3}/4) = 20\times10^{-6}$$

$$\varepsilon_c = \varepsilon_x(1/4) + \varepsilon_y(3/4) + \gamma_{xy}(\sqrt{3}/4) = 30\times10^{-6}$$

예제)

$$\varepsilon_b = 10\times10^{-6}\times(3/4) + \varepsilon_y(1/4) + \gamma_{xy}(\sqrt{3}/4) \ = 20\times10^{-6}$$

$$\varepsilon_x = 10\times10^{-6}$$

$$\varepsilon_c = 10\times10^{-6}\times(1/4) + \varepsilon_y(3/4) + \gamma_{xy}(\sqrt{3}/4) \ = 30\times10^{-6}$$

$$\varepsilon_b = 10\times10^{-6}\times(3/4) + \varepsilon_y(1/4) + \gamma_{xy}(\sqrt{3}/4) \ = 20\times10^{-6}$$

$$30\times10^{-6} + \varepsilon_y + \gamma_{xy}(\sqrt{3}) \ = 80\times10^{-6}$$

$$\varepsilon_y = 50\times10^{-6} - \gamma_{xy}\left(\sqrt{3}\right)$$

$$\varepsilon_c = 10\times10^{-6} + \varepsilon_y(3) + \gamma_{xy}(\sqrt{3}) \ = 120\times10^{-6} \quad \leftarrow \ \varepsilon_y = 50\times10^{-6} - \gamma_{xy}\left(\sqrt{3}\right)$$

$$10\times10^{-6} + 150\times10^{-6} - \gamma_{xy}(3\sqrt{3}) + \gamma_{xy}(\sqrt{3}) \ = 120\times10^{-6}$$

$$\gamma_{xy}(2\sqrt{3}) \ = 40\times10^{-6}$$

$$\gamma_{xy} = 11.54700538\ldots\times10^{-6} = 11.55\times10^{-6} \qquad \gamma_{xy} = 11.55\times10^{-6}$$

$$\varepsilon_y = 50\times10^{-6} - \gamma_{xy}\left(\sqrt{3}\right)$$

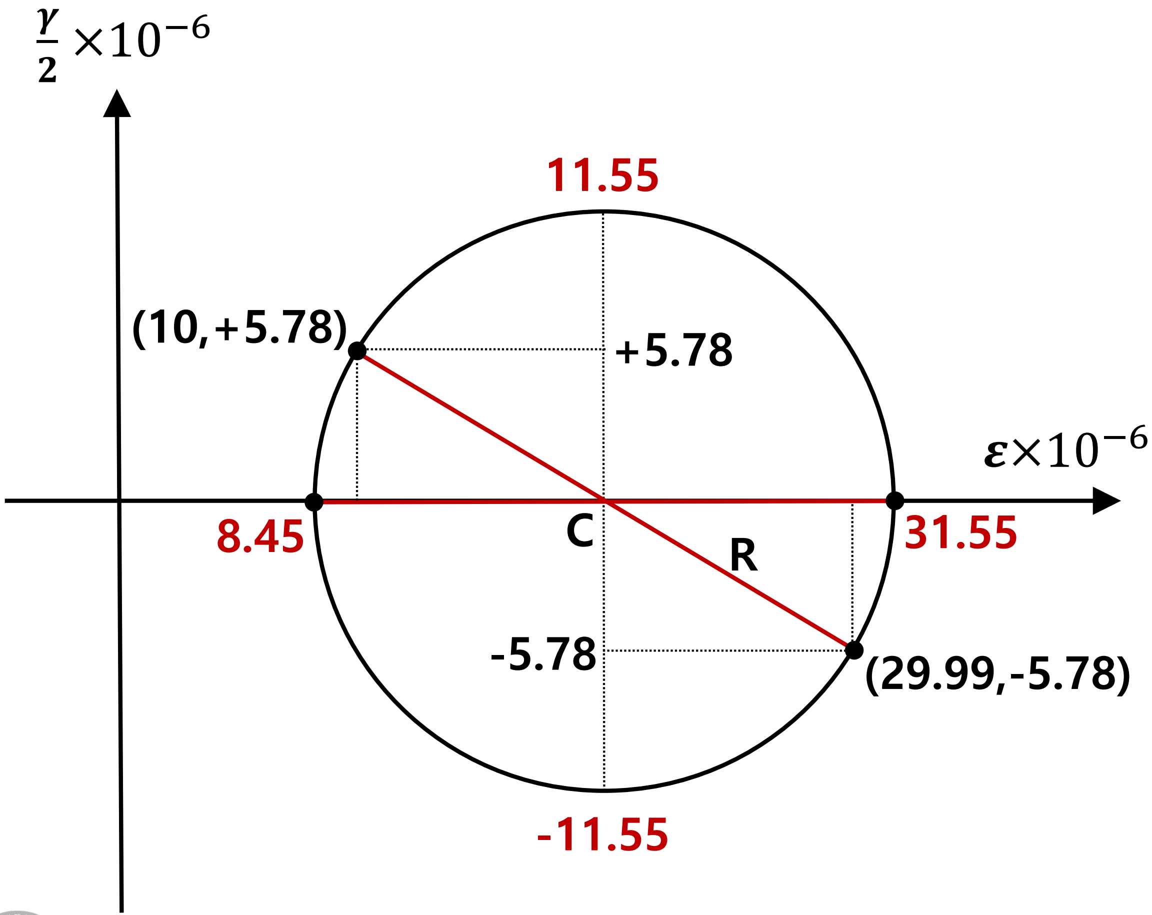
$$= 29.99481\times10^{-6} = 29.99\times10^{-6} \qquad \varepsilon_y = 29.99\times10^{-6}$$

예제)

$$\varepsilon_x = 10\times10^{-6}$$
$$\varepsilon_y = 29.99\times10^{-6}$$
$$\gamma_{xy} = 11.55\times10^{-6}$$

$$\varepsilon_1 = C + R, \varepsilon_2 = C - R$$

$$C = \frac{(\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{2} \quad R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$



$$C = \frac{(\varepsilon_x + \varepsilon_y)}{2} = \frac{39.99}{2} = 20.00$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{-19.99}{2}\right)^2 + (5.78)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{-19.99}{2}\right)^2 + (5.78)^2}$$

$$= 11.5456926 \ldots = 11.55$$

TheMAD