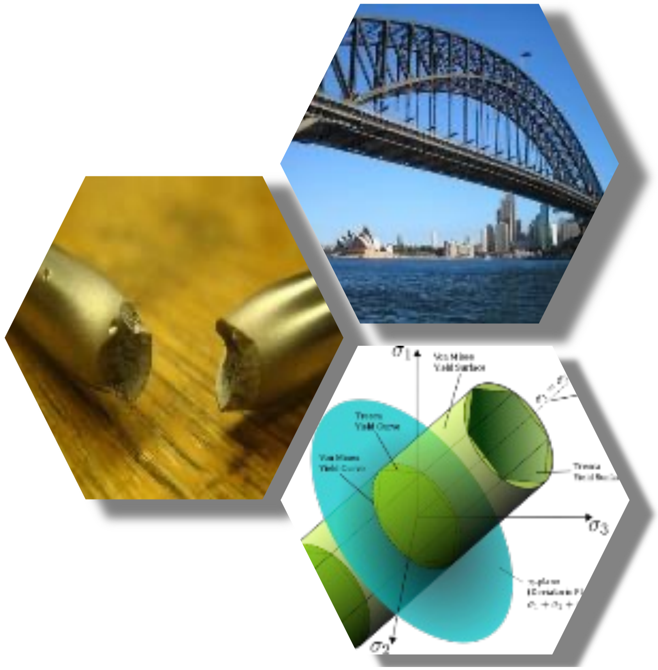
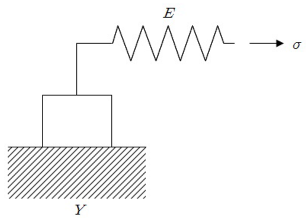
제6장 항복이론



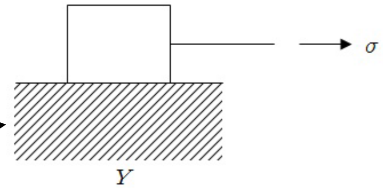
Chapter 5. 요약

선형 탄성-소성 모델

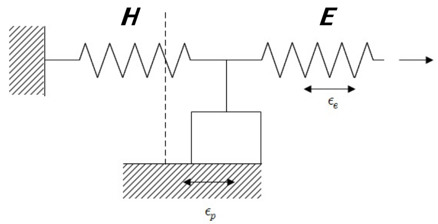
- 탄성-완전소성 모델(elastic-perfectly plastic)



- 강체-선형 변형경화 모델(rigid-linear strain hardening)
- 강체-완전소성 모델(rigid-perfectly plastic)



- 탄성-선형 변형경화 모델(elastic-linear strain hardening)



비선형 탄성-소성 모델

- Ramberg-Osgood 모델 $\sigma = K(\varepsilon_p)^n$ K:강도계수, n:변형경화 지수

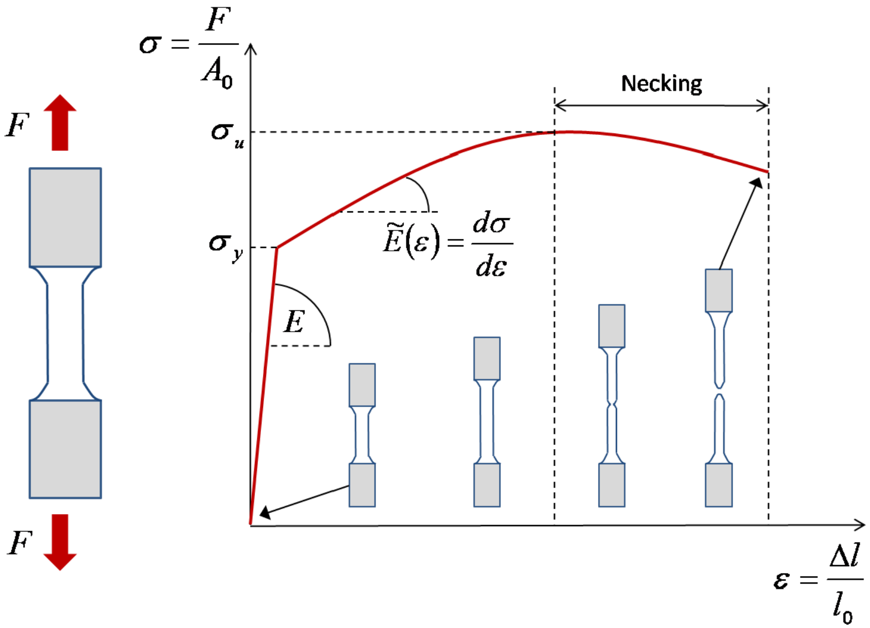
점탄성 재료 모델(viscoelastic material model)

- Maxwell 모델: 응력완화 시험
- Kelvin 모델: 크리프 시험

재료의 항복

■ 항복 기준 성립 요소: **응력, 변형률, 변형에너지**

- 응력 : 설계시의 응력이 항복강도를 넘지 않도록 하는 것
- 변형률: 탄성 변형률을 넘지 않도록 하는 것
- 변형에너지: 각 응력 성분의 상호 연관성을 고려하여 에너지를 계산하고 그 값이 정해진 기준에 도달하는 가를 통해서 판단함.



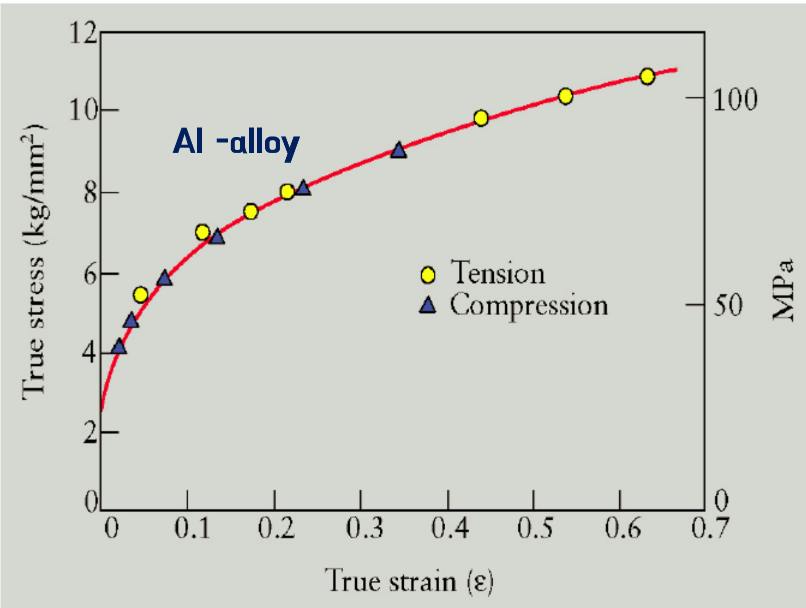
항복에 대한 소재의 특성

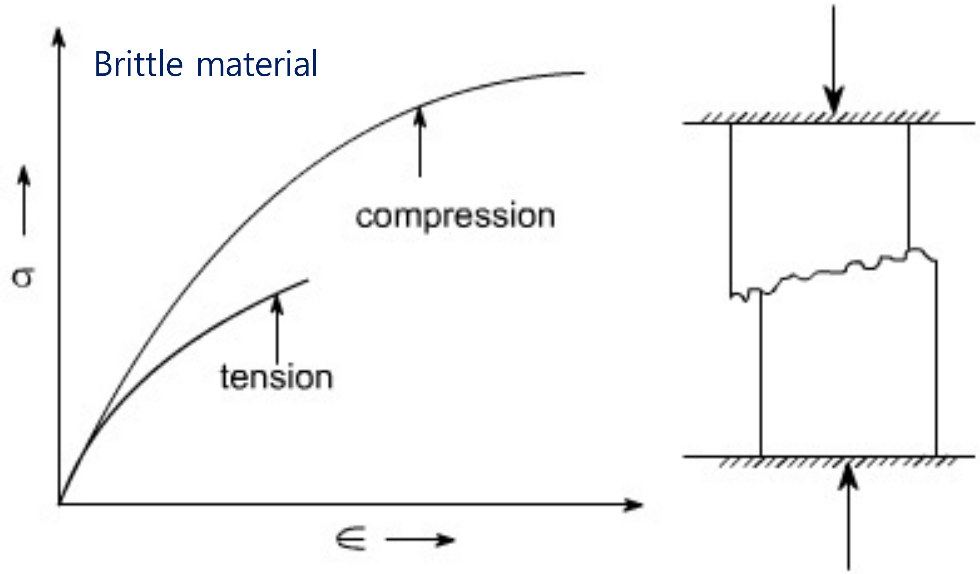
■ **항복으로 인한 변형**

- **전단응력의 중요성이 커짐**
- **연성재료 ($\varepsilon_f > 0.05$)에서 중요: 납, 알루미늄, 구리, 연강 등**

■ **파괴가 발생하는 변형**

- **수직응력의 중요성이 커짐**
- **취성재료 ($\varepsilon_f < 0.05$)에서 중요: 콘크리트, 유리, 세라믹, 주철**





항복조건

- 항복조건은 응력에 대한 함수로 주어지며
- 수식으로 표현하면 다음 조건을 만족시키는 응력의 조합 상태에서 항복이 일어난다고 가정.

$$f(\sigma) = c$$

- 여기서 σ는 응력상태로서 해당 조건을 만족하는 모든 가능한 응력의 조합을 의미
- c는 항복조건에 따른 특정한 상수임.

- 3차원 상태에서 응력은 6개의 성분 (대칭을 고려)을 가지게 되며 항복조건은 응력의 함수이므로 다음과 같이 표시할 수 있다.

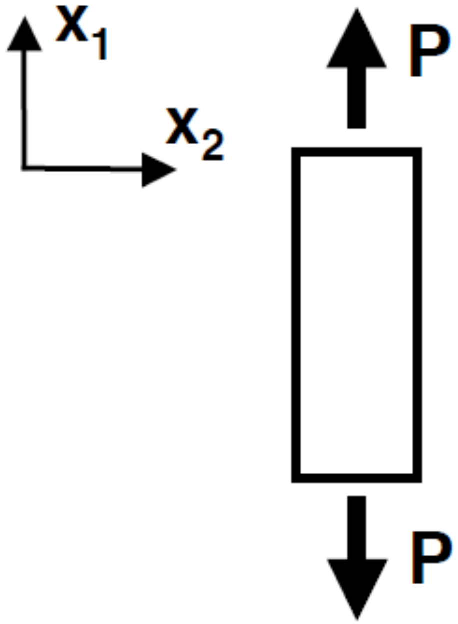
$$f\left(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\right) = c$$

  - 주응력으로 표시하면 다음과 같음

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = c$$

1축 인장에서 항복조건

■ 1축 인장 상태의 항복조건



Stress state: $\sigma_{11} = P/A$

$\sigma_{22} = 0$

$\sigma_{33} = 0$

항복이 발생하는 조건

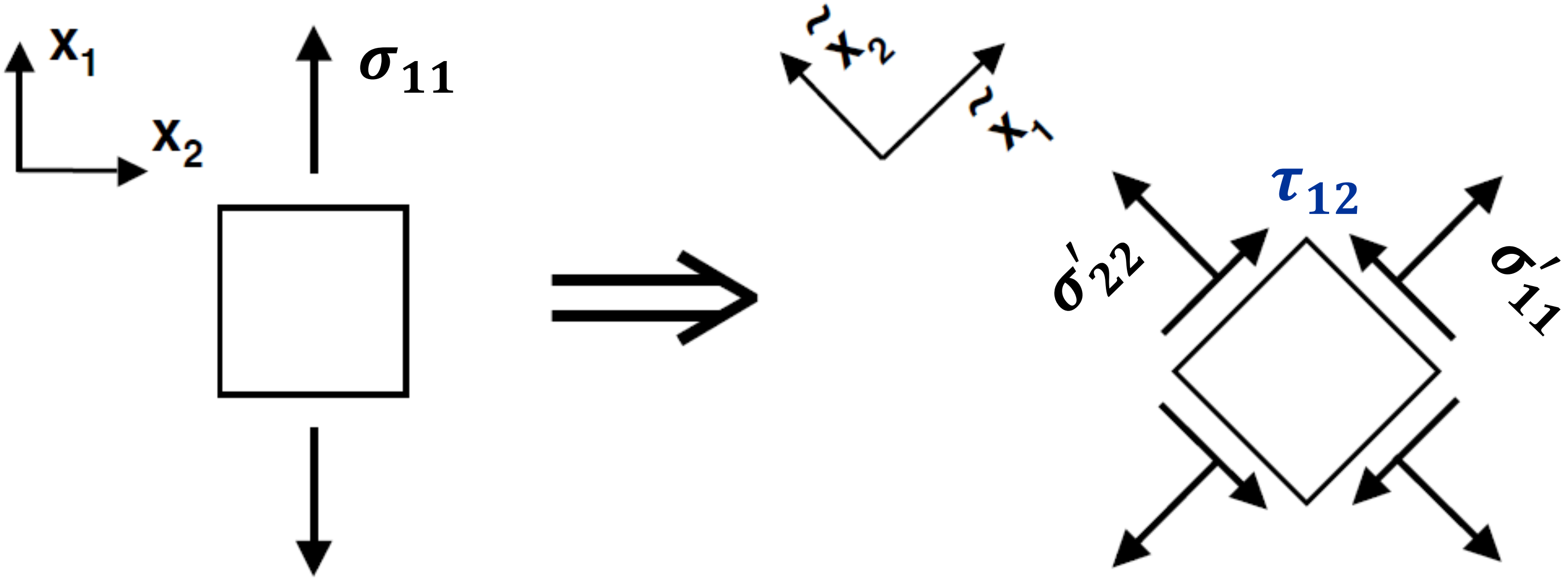
$f(\sigma_{11}) \geq C$ (C는 항복강도)

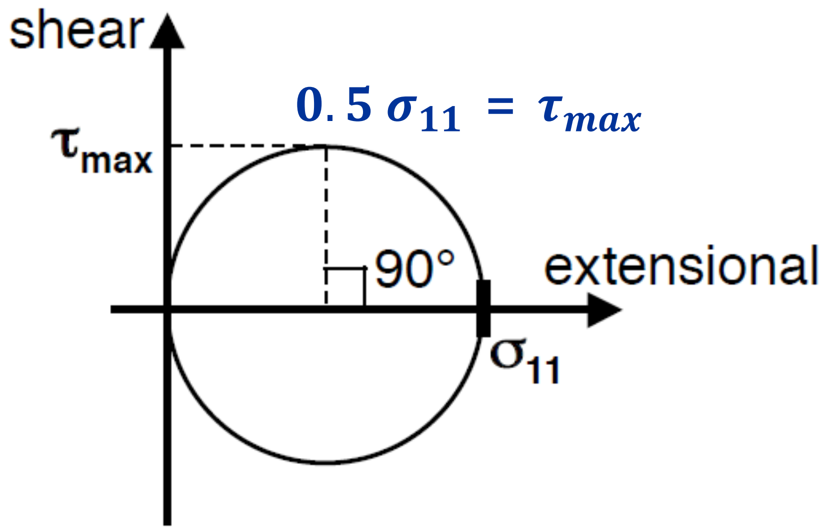
다시말해,

$$\sigma_{11} \geq C = \sigma_Y$$

TheMAD

1축 인장에서 항복조건

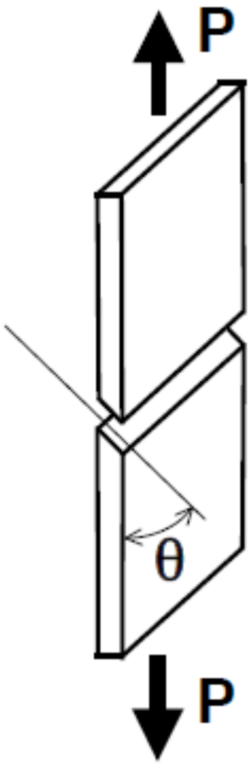




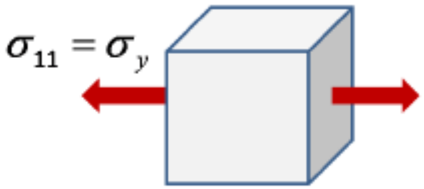
- 일축인장에서는 인장방향의 45° 방향으로 최대의 전단응력이 걸림
- 최대전단응력, τ_{max}, 의 2배 응력이 1축으로 걸렸을 때 항복이 발생

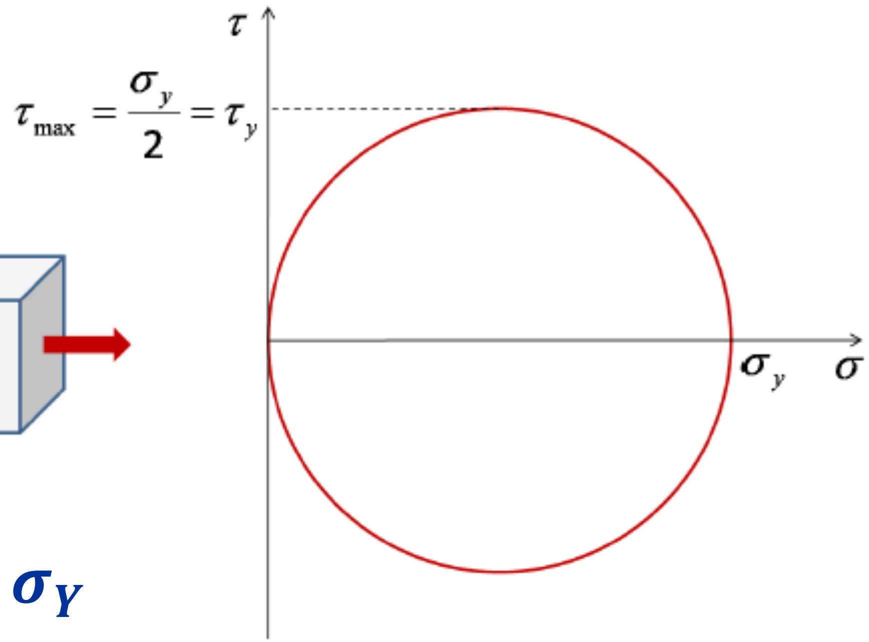
$$\sigma_{11} = 2\tau_{max} \geq \sigma_Y$$

1축 인장에서 항복조건



- **인장방향의 45° 방향으로 최대의 전단응력이 걸리고**
- **이 전단응력 크기의 2배에 해당하는 σ_{11}응력이 걸렸을 때 항복이 발생**





$$(\boldsymbol{\sigma_{max}} - \boldsymbol{\sigma_{min}}) = \mathbf{2}\boldsymbol{\tau_{max}} \geq \boldsymbol{\sigma_Y}$$

Tresca 항복조건 (일반화)

■ 모델의 특징

- Tresca는 19세기 프랑스 출신의 공학자로서 **소성 변형에 대한 연구**에 많은 기여
- **전단응력에 의한 항복기준**을 제안하였음.
- Tresca 항복기준은 **최대 전단응력이 특정한 값**을 초과하면 항복이 일어난다고 판단
- 3차원 응력 조건에서 **주응력이 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$으로 주어진다면 다음과 같이 최대와 최소 응력의 차이가 특정한 값을 넘어설 때 항복이 일어난다고 가정**하였음

$$\tau_{max} = \frac{1}{2}|(\sigma_{max} - \sigma_{min})|$$

$$FS = \frac{\sigma_Y}{|\sigma_1 - \sigma_3|}$$

$|\sigma_{max} - \sigma_{min}| = c$, 일 때 항복 발생

FS = factor of safety (안전계수)

$|\sigma_1 - \sigma_3| = c$ $\quad when\ \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$

$$|\sigma_1 - \sigma_3| = \sigma_Y$$

Tresca 항복조건

■ 1축 인장의 경우

- $\sigma_1 = \sigma,\ \sigma_2 = \sigma_3 = 0$
- **항복강도가 σ_Y 라고 하면 아래와 같이 $\mathrm{c} = \sigma_Y$ 로 결정됨.**

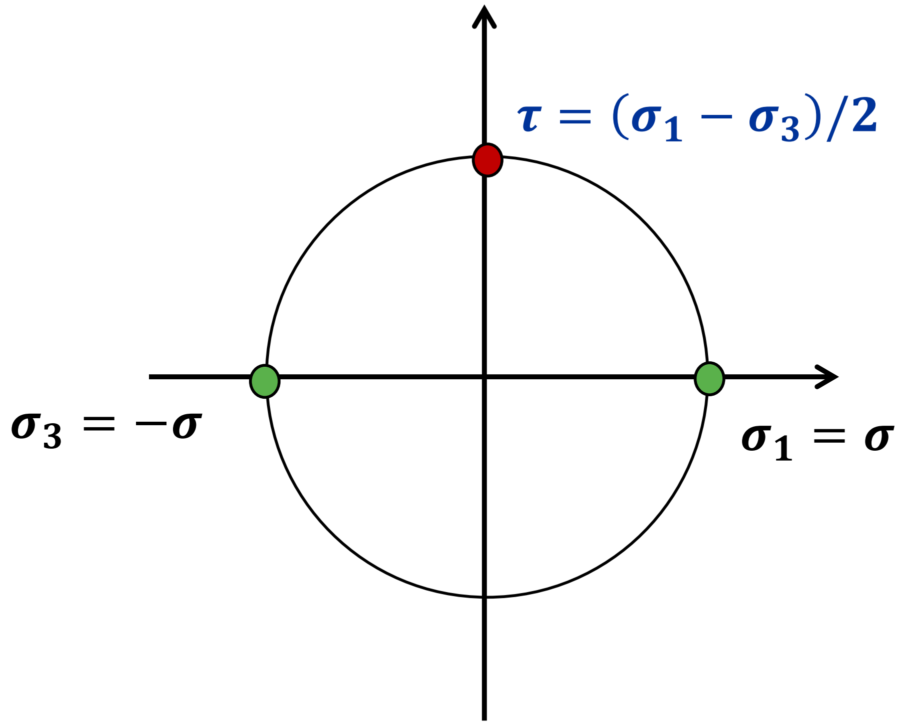
$$(\boldsymbol{\sigma_1} - \boldsymbol{\sigma_3}) = \boldsymbol{c} = \boldsymbol{\sigma_Y}$$

■ 순수전단의 경우

- $\sigma_1 = \sigma,\ \sigma_2 = 0,\ \sigma_3 = -\sigma$

$$(\boldsymbol{\sigma_1} - \boldsymbol{\sigma_3}) = \boldsymbol{c} = \boldsymbol{2k}$$

- **여기서 k는 순수전단 항복응력을 의미**



Tresca 항복조건

■ 평면응력 조건에서 $(\sigma_3 = 0)$ 주응력 σ_1, σ_2 를 다음과 같이 가정해보자.

$(if\ \sigma_1 > \sigma_2\ or\ \sigma_2 > \sigma_1)$

1) 만일 주응력 σ_1 과 σ_2 의 부호가 반대라면,

$$|(\boldsymbol{\sigma}_{max} - \boldsymbol{\sigma}_{min})| = \boldsymbol{Y}$$

$$|(\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_2)| = \boldsymbol{Y} \qquad \therefore \boldsymbol{\sigma}_2 = \boldsymbol{\sigma}_1 \pm \boldsymbol{Y}$$

2) 만일 주응력 σ_1과 σ_2의 부호가 같다면,

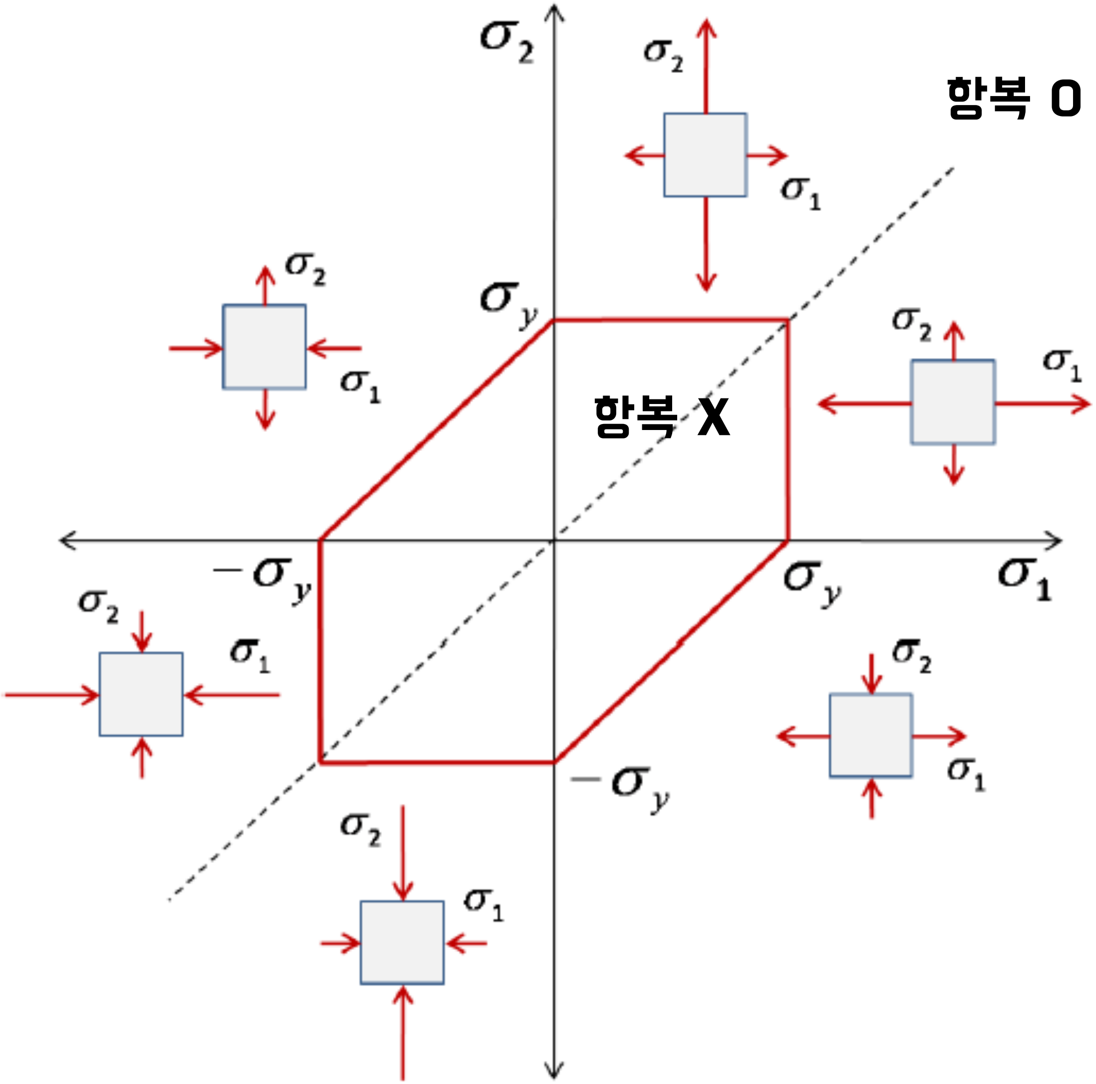
$$|\sigma_1| > |\sigma_2| > \sigma_3 = 0\ \ or\ \ |\sigma_2| > |\sigma_1| > \sigma_3 = 0)$$

$$|(\boldsymbol{\sigma}_{max} - \boldsymbol{\sigma}_{min})| = \boldsymbol{Y}$$

$$|(\boldsymbol{\sigma}_1 - \boldsymbol{\sigma}_3)| = \boldsymbol{Y} \qquad |\boldsymbol{\sigma}_1| = \boldsymbol{Y} \qquad \therefore \boldsymbol{\sigma}_1 = \pm\boldsymbol{Y}$$

$$|(\boldsymbol{\sigma}_2 - \boldsymbol{\sigma}_3)| = \boldsymbol{Y} \qquad |\boldsymbol{\sigma}_2| = \boldsymbol{Y} \qquad \therefore \boldsymbol{\sigma}_2 = \pm\boldsymbol{Y}$$

Tresca 항복곡면



von Mises 항복조건

- Tresca 항복곡면과 매우 유사하나 **불연속점이 없다는 것**이 다름.
- 소재의 **최대 전단 에너지량**이 1축 인장에서 **최대 전단 에너지**와 같을 때 항복이 일어난다는 가정에서 출발

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = c$$

- 여전히 **주응력들의 차이가 항복조건에 영향**을 줌.
- 그러나, **최대 최소 뿐만 아니라 중간 값도 영향**을 줌.
- Tresca에서와 같이 등압력은 소성에 영향을 주지 않는다.
- **연성재료 실험에서 가장 잘 일치한다.**

von Mises 항복조건

■ 1축 인장의 경우

$$\sigma_1 = \sigma, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$

$$(\sigma_1 - \cancel{\sigma_2})^2 + (\cancel{\sigma_2} - \cancel{\sigma_3})^2 + (\cancel{\sigma_3} - \sigma_1)^2 = c = 2\sigma_Y^2$$

$\alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ **가** $0, 1, \infty$ **일때 Tresca 항복 조건과 일치**

■ 순수 전단의 경우

$\sigma_1 = k, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -k$ **(k는 전단항복강도)**

$$(\sigma_1 - \cancel{\sigma_2})^2 + (\cancel{\sigma_2} - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = c = 6k^2$$

$$2\sigma_Y^2 = 6k^2$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_Y$$

TheMAD

von Mises 항복조건

■ **평면응력 상태**

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 = 0$$

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \cancel{\sigma_3})^2 + (\cancel{\sigma_3} - \sigma_1)^2 = c = 2\sigma_Y^2$$

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2)^2 + (\sigma_1)^2 = 2\sigma_Y^2$$

$$2(\sigma_1)^2 - 2\sigma_1\sigma_2 + 2(\sigma_2)^2 = 2\sigma_Y^2$$

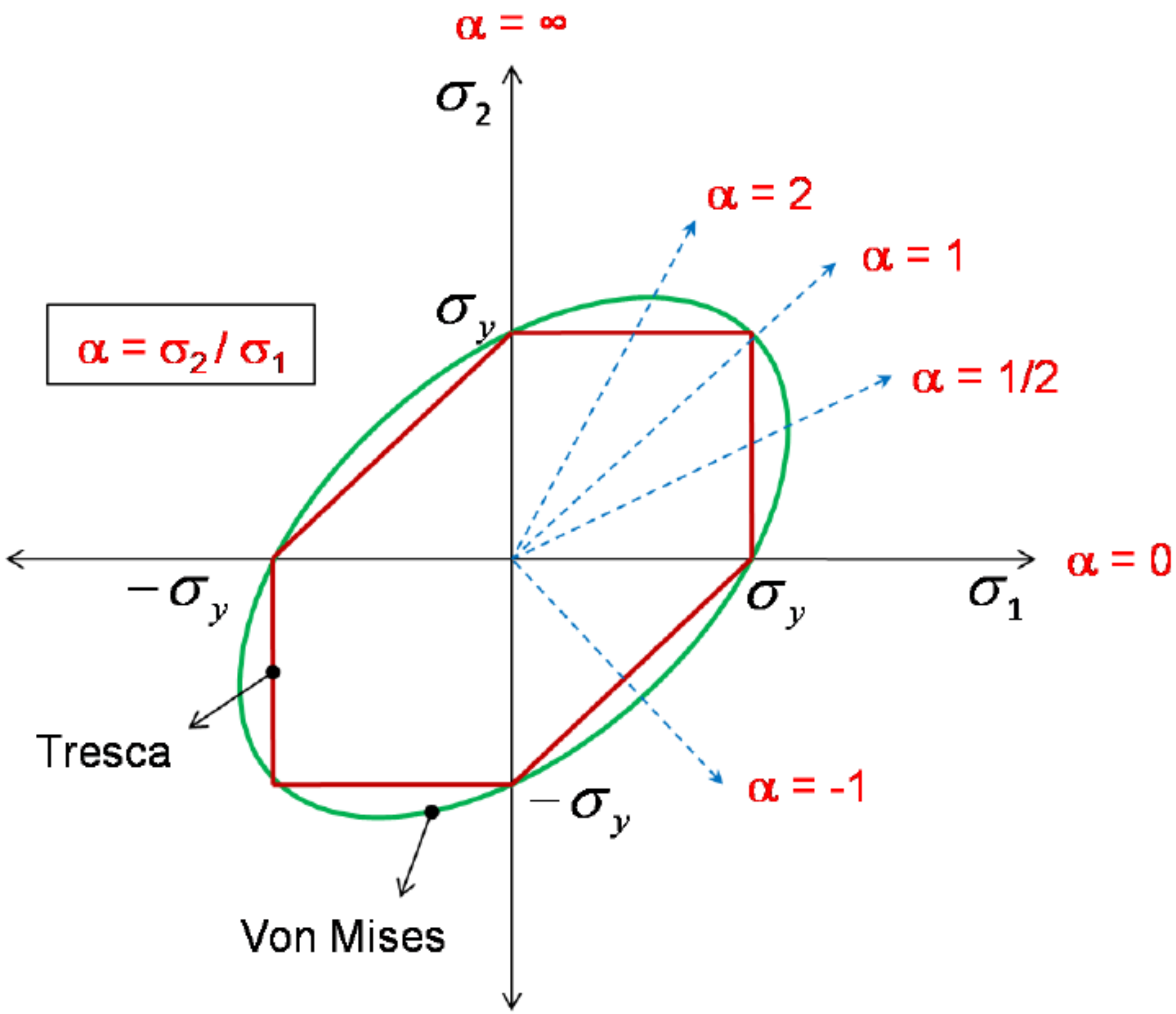
$$\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} = \sigma_Y$$

$$FS = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}}$$

FS = **factor of safety (안전계수)**

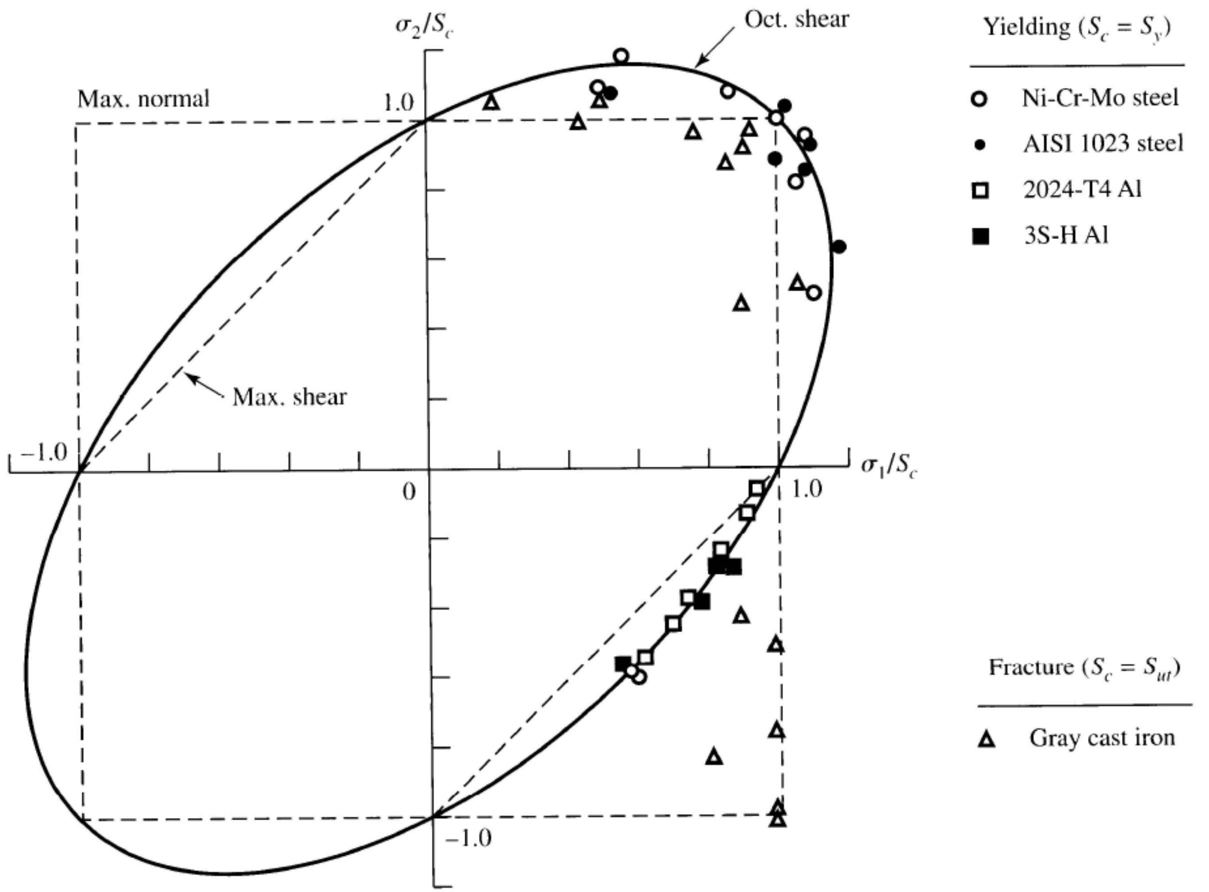
TheMAD

평면응력 상태에서 von Mises 항복곡면



TheMAD

Tresca 와 von Mises 항복곡면 비교



- 전반적으로 von Mises 이론이 가장 정확하게 파손을 예측
- 설계 목적으로는 Tresca 이론이 사용하기 쉬우며 결과도 보수적임

예제)

평면 응력 상태에 있는 부품의 한 지점에서의 응력성분이 $\sigma_x = 100\ MPa, \sigma_y = 0\ MPa, \tau_{xy} = 80\ MPa$ 로 주어졌을 때 a) Tresca 기준 b) von Mises 기준을 각각 사용하여 부품의 파손 여부와 안전계수를 계산하시오. (단, 항복강도는 $\sigma_Y = 200\ MPa$이다.)

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{100+0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{100-0}{2}\right)^2 + 50^2} = 144.34\ MPa\ or\ -\ 44.34\ MPa$$

a) Tresca 기준

$$FS = \frac{\sigma_Y}{|(\sigma_1 - \sigma_3)|} = \frac{200}{188.68} = 1.06$$ **파손 X**

b) von Mises 기준

$$FS = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{\sigma_1{}^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2{}^2}} = \frac{200}{170.88} = 1.17$$ **파손 X**

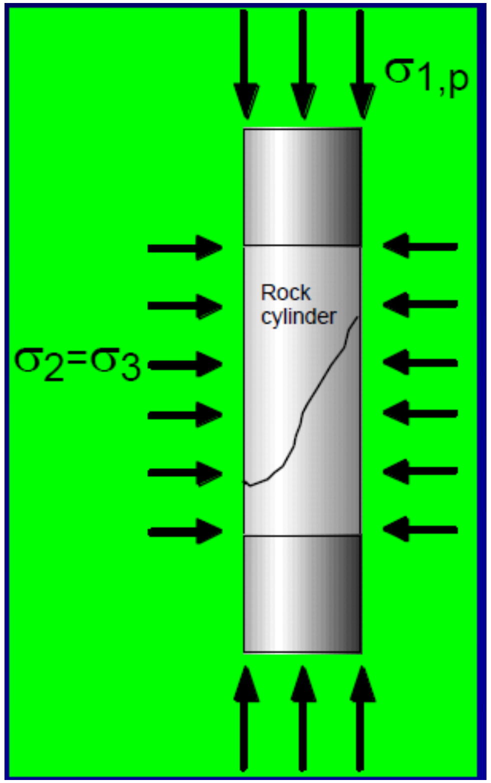
취성 재료의 파손

■ 연성 vs. 취성 재료의 파손

- 항복에 의해서 파손되는 연성재료와 달리 취성재료는 파괴에 의해서 파손이 발생하기 때문에 두 재료는 전혀 다른 파손의 양상을 보임.

- 최근에는 주로 취성재료에 대한 파손 연구가 활발하게 진행되고 있으며 그 이유는 어느 정도의 변형을 허용하는 연성재료와 달리 변형의 허용도가 상대적으로 작은 취성재료에서는 급작스런 파손을 경험하므로 사고의 위험이 더 높기 때문이다.

- 취성 재료에서는 최대 수직응력 기준(maximum normal stress criterion)과 Mohr-Coulomb 기준이 적용됨.



TheMAD

최대 수직응력

■ 최대 수직응력 기준(maximum normal stress criterion)

- 재료내의 임의의 지점에서 최대 수직응력의 크기가 최대 인장강도(ultimate tensile strength, S_{ut}) 또는 최대 압축강도(ultimate compressive strength, S_{uc})를 넘어서면 파괴.

- 먼저 재료내의 응력 상태를 주응력 $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$으로 표시할 경우, 다음과 같은 조건에서 파손.

$$\sigma_1 \geq S_{ut} \quad \textbf{or} \quad \sigma_3 \leq -S_{uc}$$

- 최대 인장강도와 최대 압축강도가 같다는 가정 ($S_{ut} = S_{uc} = S_u$)에서는 다음과 같음

$$\sigma_{max} = S_u$$ 파괴발생 (인장 혹은 압축)

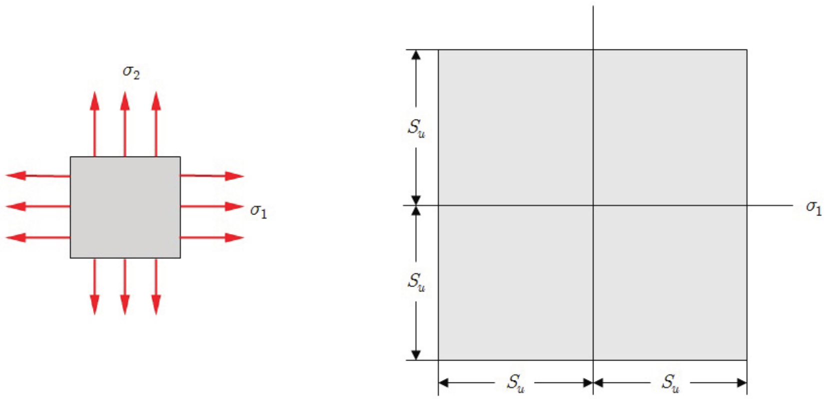


Figure: 최대 수직응력 기준

TheMAD

최대 수직응력을 기준으로 한 파손 예측

- **평면 응력 상태에서 두 주응력이 $\sigma_\alpha \geq \sigma_\beta$의 관계로 주어진다고 가정하면 최대 수직응력 기준은 다음과 같이 쓸 수 있다.**

$$\sigma_\alpha \geq S_{ut} \quad \textbf{or} \quad \sigma_\beta \leq -S_{uc}$$

- **한편 두 주응력의 부호에 따라 다음의 4가지 경우로 나눌 수 있다.**

- $\sigma_\alpha \geq \sigma_\beta \geq 0$**인 경우 두 주응력은 모두 인장응력이 됨.** $\quad \sigma_\alpha = S_{ut}$

- $\sigma_\alpha \geq 0 \geq \sigma_\beta$**이면서** $\sigma_\alpha \geq S_{ut}$ **인 경우** $\quad \sigma_\alpha = S_{ut}$

- $\sigma_\alpha \geq 0 \geq \sigma_\beta$ **이면서** $\sigma_\beta \leq -S_{uc}$ **인 경우** $\quad \sigma_\beta = -S_{uc}$

- $0 \geq \sigma_\alpha \geq \sigma_\beta$ **인 경우 두 주응력은 모두 압축응력이 됨.** $\quad \sigma_\beta = -S_{uc}$

Coulomb-Mohr 파괴기준

■ Coulomb-Mohr 파괴기준 모델

- 인장강도와 압축강도가 다른 값을 가지는 경우에 효과적으로 적용
- ex) 콘크리트, 세라믹, 유리… 등
- 인장하중을 가하여 최대 인장강도 S_{ut} 에 이르는 경우를 고려하여 Mohr 원으로 표시하고, 또한 압축하중을 적용하여 최대 압축강도에 해당하는 Mohr원을 작도하여 완성.

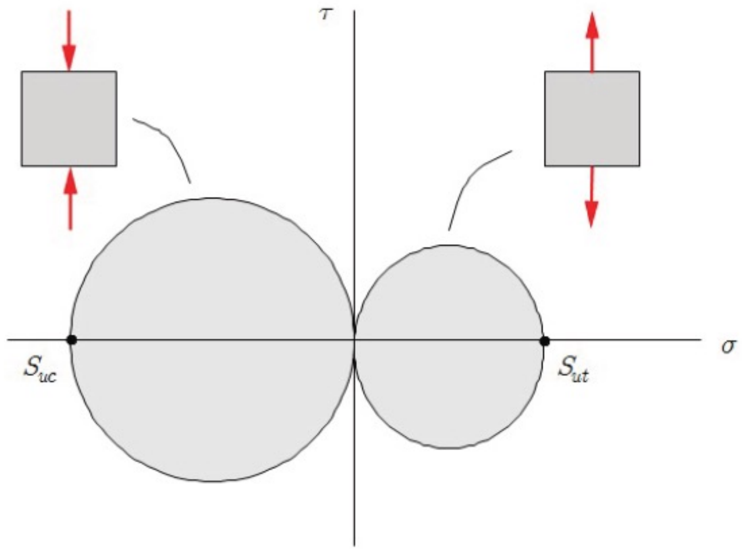


Figure: Mohr 원에서의 인장응력 및 압축응력

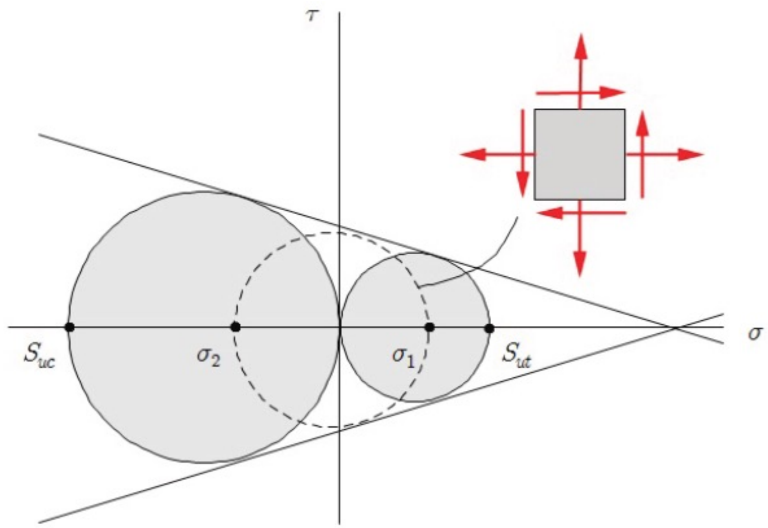


Figure: Coulomb-Mohr 기준에서의 직선과 Mohr 원

Coulomb-Mohr 파괴기준

- Coulomb-Mohr 기준에서는 작도한 두 Mohr 원을 접하는 직선이 만드는 구간 내에 속할 때 파괴가 일어나지 않는 것으로 판단함.
- Coulomb-Mohr 기준의 원리는 임의의 하중에 의한 응력상태를 나타내는 Mohr 원과 인장과 압축으로 만들어진 Mohr원과의 접선의 교점에서 전단응력을 구하고
- 이를 해당하는 Mohr원에서의 주응력으로 변환하여 나타내는 것임.

$$\frac{\sigma_1}{S_{ut}} - \frac{\sigma_3}{S_{uc}} = 1$$

- 평면응력상태 일때,
- $\sigma_\alpha \geq \sigma_\beta \geq 0$ 인 경우, $\sigma_1 = \sigma_\alpha$, $\sigma_3 = 0$ 이므로 $$\frac{\sigma_\alpha}{S_{ut}} - \frac{0}{S_{uc}} = 1$$ $$\boldsymbol{\sigma_\alpha = S_{ut}}$$
- $\sigma_\alpha \geq 0 \geq \sigma_\beta$ 인 경우 경우 $\sigma_1 = \sigma_\alpha$, $\sigma_3 = \sigma_\beta$이므로 $$\boldsymbol{\frac{\sigma_\alpha}{S_{ut}} - \frac{\sigma_\beta}{S_{uc}} = 1}$$
- $0 \geq \sigma_\alpha \geq \sigma_\beta$ 인 경우 $\sigma_1 = 0$, $\sigma_3 = \sigma_\beta$ 이므로 $$\frac{0}{S_{ut}} - \frac{\sigma_\beta}{S_{uc}} = 1$$ $$\boldsymbol{\sigma_\beta = S_{uc}}$$