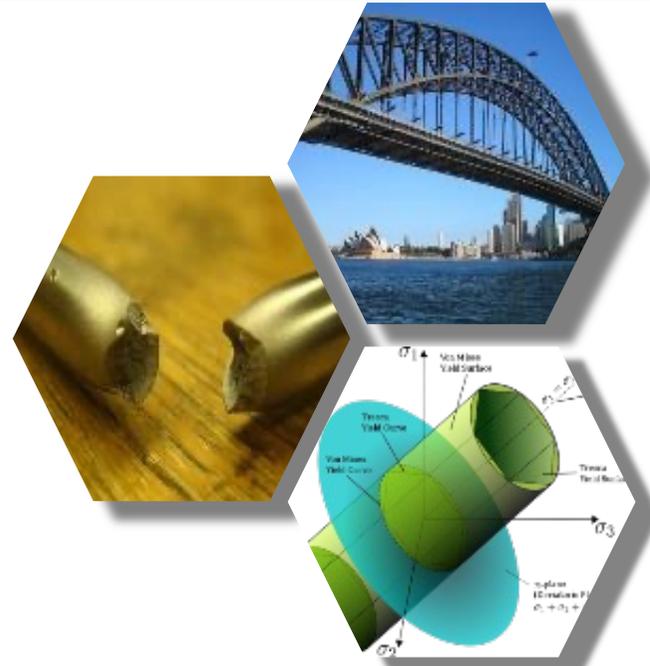


제5장 비탄성 재료의 거동



Chapter 4. 요약

변위: translation, rotation, deformation

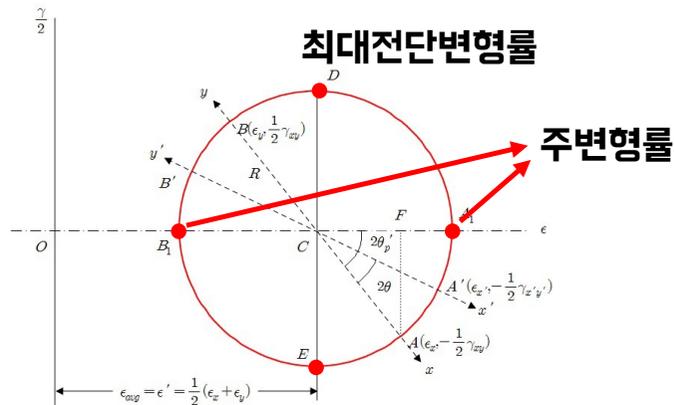
변형률: 수직변형률, 전단변형률 → 행렬화

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

변형률의 변환 (각도) 각도의 변화에 따라 수직변형률이 최대/최소가 되는 → 주변형률
→ 이때의 전단변형률=0

동일하게 최대전단변형률도 계산 가능

Mohr 원



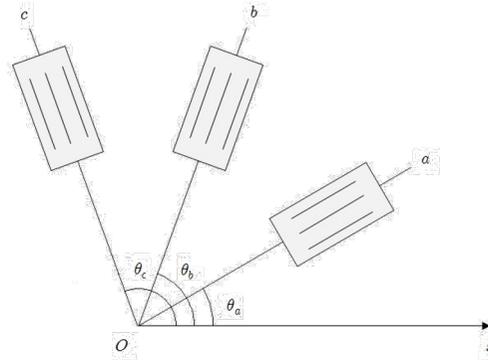
Chapter 4. 요약

변형률 로제트 (변형률 실제 측정)

$$\varepsilon_a = \cos^2\theta_a \cdot \varepsilon_x + \sin^2\theta_a \cdot \varepsilon_y + \sin\theta_a \cos\theta_a \cdot \gamma_{xy}$$

$$\varepsilon_b = \cos^2\theta_b \cdot \varepsilon_x + \sin^2\theta_b \cdot \varepsilon_y + \sin\theta_b \cos\theta_b \cdot \gamma_{xy}$$

$$\varepsilon_c = \cos^2\theta_c \cdot \varepsilon_x + \sin^2\theta_c \cdot \varepsilon_y + \sin\theta_c \cos\theta_c \cdot \gamma_{xy}$$



응력-변형률 변환

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}$$

Chapter 4. 요약

평면응력상태(얇은판)

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu\sigma_x)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}$$

평면변형률상태(매우두꺼운)

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x]$$

$$\sigma_z = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}$$

직교이방성재료

$$\sigma_1 = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} (\varepsilon_1 + \nu_{21}\varepsilon_2)$$

$$\sigma_2 = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} (\varepsilon_2 + \nu_{12}\varepsilon_1)$$

$$\tau_{12} = G_{12}\gamma_{12}$$

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}$$

변형률 에너지 밀도

$$u_e = \left(\frac{\sigma^2}{2E} \right)$$

변형률 에너지

$$U_e = \int_V u_e dV = \int_V \frac{\sigma^2}{2E} dV$$



비탄성 거동

탄성 vs. 비탄성(inelastic) 변형

- 탄성: 가역 변형 (reversible)

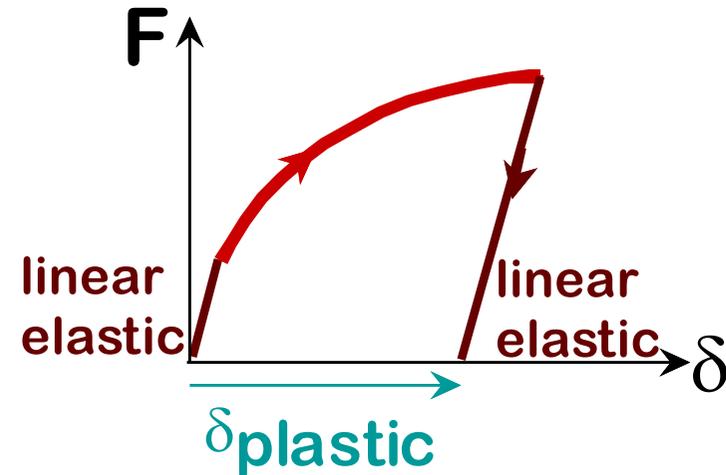
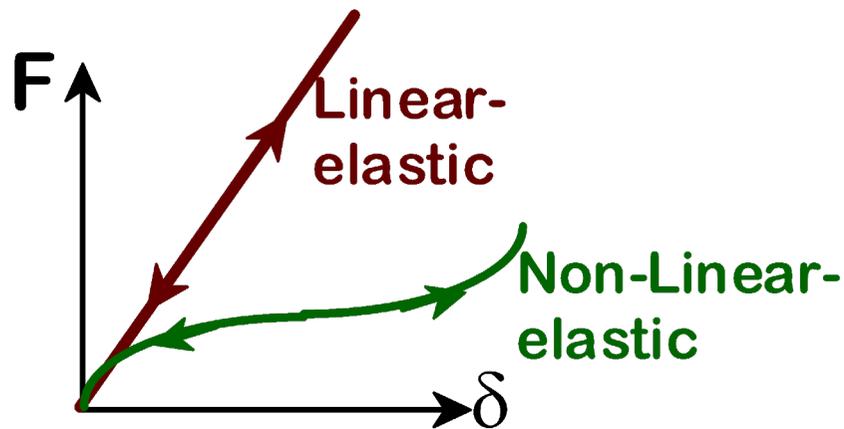
재료에 가해진 응력에만 의존. 시간과 이력(history)의 영향이 없음.

일반적으로 응력과 변형률이 선형적인 관계

- 비탄성: 비가역 변형 (irreversible)

응력뿐만 아니라 시간과 이력에 영향을 받음. (점탄성)

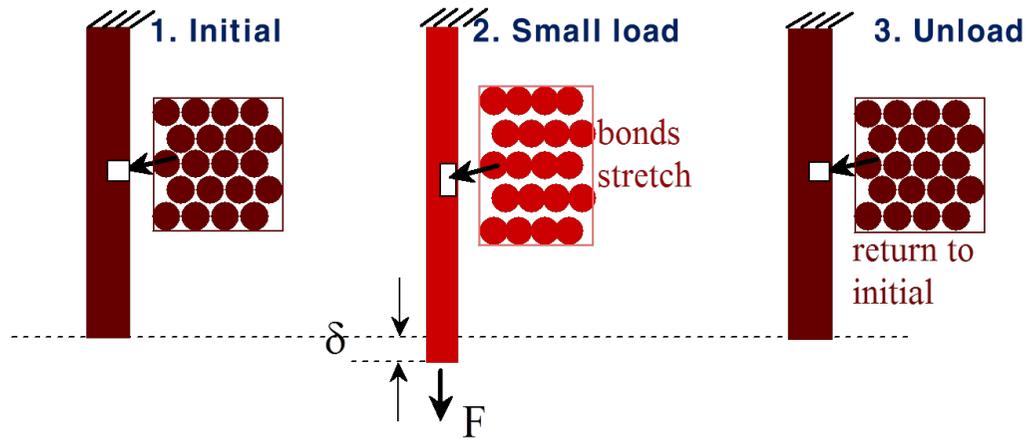
대부분의 소재에서 응력과 변형률이 비선형적인 관계



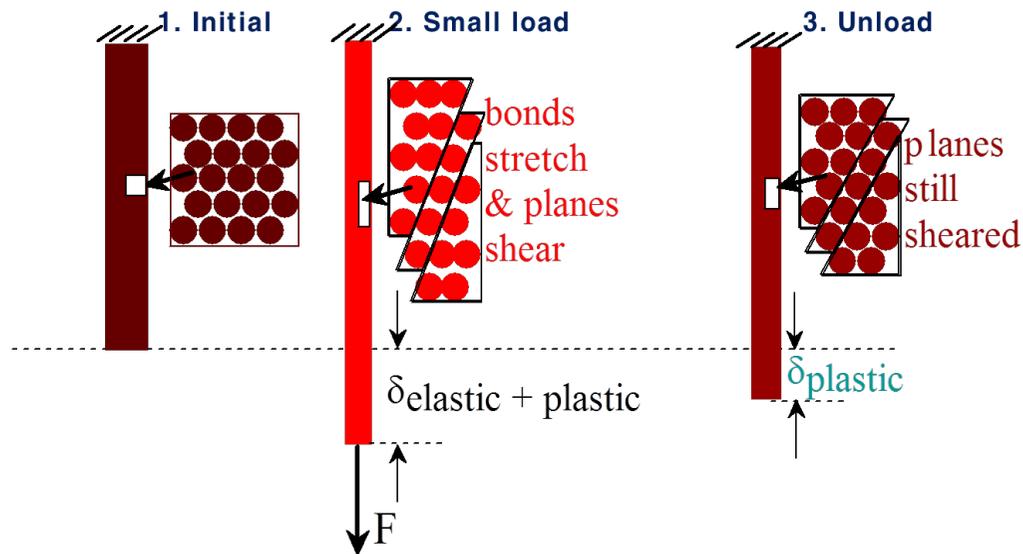
소성변형

전위의 이동 (1차원 결합의 움직임)

- 탄성: 원자들의 결합이 깨지지 않음.

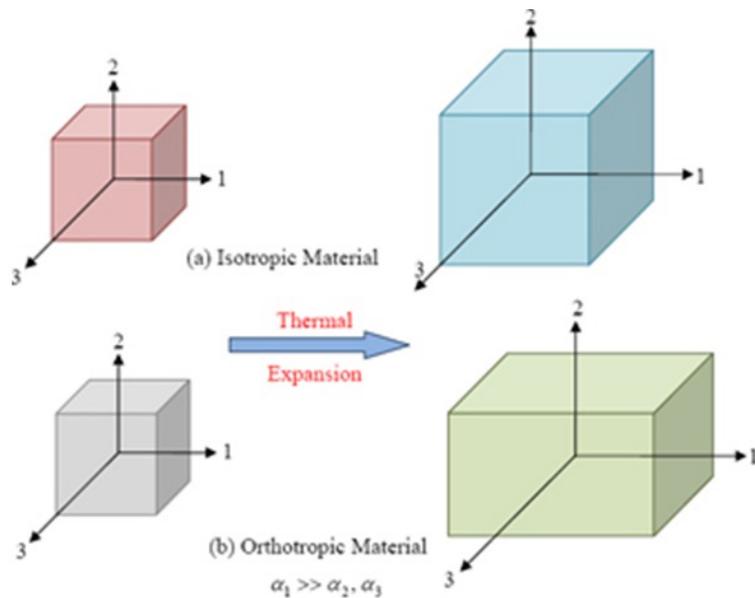


- 소성: 원자들이 원래의 위치를 벗어나 다른 위치로 이동

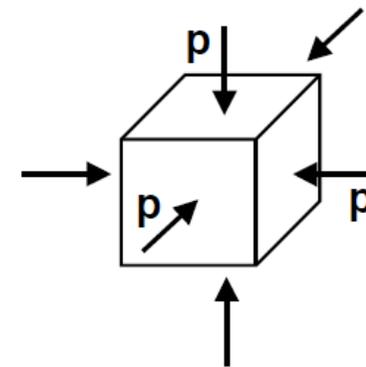


소성변형의 일반적인 가정

- 재료의 부피가 변하지 않는다 (비압축성, incompressibility). $V = 0$
- Bauschinger 효과를 무시한다.
- 항복강도는 정수압(hydrostatic pressure)과 무관하다.
- 등방성(isotropic) 재료로 가정한다.
- 변형 속도(rate of deformation)에 무관하다.



Unit cube under state of hydrostatic stress



비탄성 거동의 모델

선형 탄성-소성 모델

- 탄성-완전소성 모델(elastic-perfectly plastic)
- 강체-선형 변형경화 모델(rigid-linear strain hardening)
- 강체-완전소성 모델(rigid-perfectly plastic)
- 탄성-선형 변형경화 모델(elastic-linear strain hardening)

비선형 탄성-소성 모델

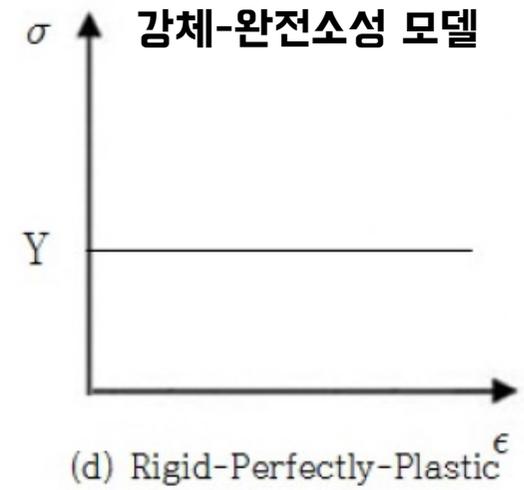
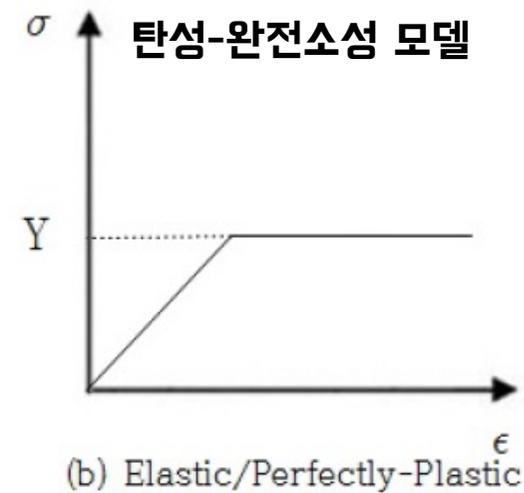
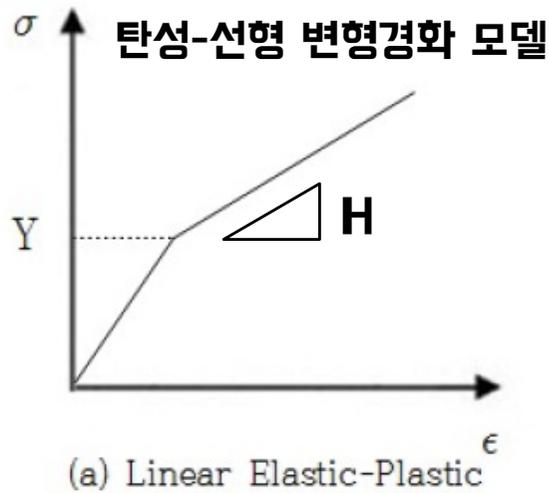
- Ramberg-Osgood 모델

점탄성 재료 모델(viscoelastic material model)

- Maxwell 모델
- Kelvin 모델

선형 탄성-소성 모델

- 소성변형 영역을 직선으로 가정 → 수식화, 모델화할 수 있다
- 소성변형 영역을 변형 경화라 한다 → 변형 시킬수록 더 큰 힘이 든다
- 변형경화가 아주 작은 경우 → 완전소성 모델
- 탄성변형이 없는 경우 → 강체



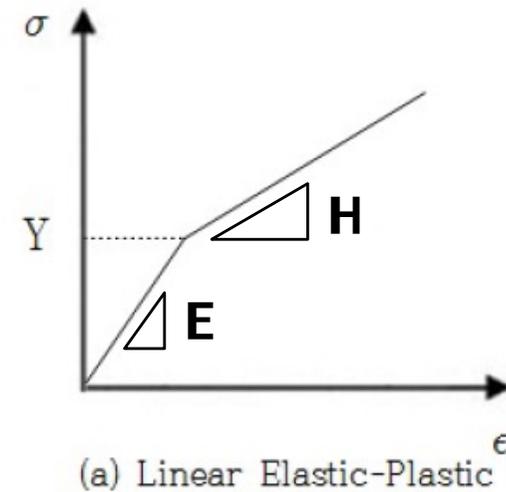
선형 탄성-소성 모델: 1. 탄성-선형 변형경화 모델

- 선형적인 탄성변형 + 선형 변형경화(항복점 이상에서)
- 전체 변형률 = 탄성 변형률 + 소성 변형률

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}, \quad \text{when } \sigma \leq \sigma_Y$$

$$\varepsilon_p = \frac{\sigma - \sigma_Y}{H}, \quad \text{when } \sigma > \sigma_Y \quad H: \text{경화계수}$$

$$\varepsilon_{tot} = \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma - \sigma_Y}{H}$$



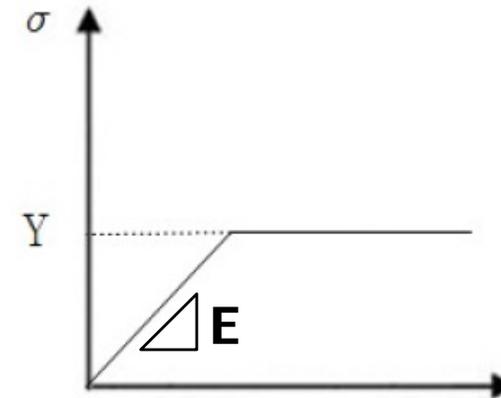
선형 탄성-소성 모델: 2. 탄성-완전소성 모델

- 선형적인 탄성변형과 직선의 형태로 표시된 소성변형을 결합한 재료 모델
- 항복점 이하의 하중에서는 Hook의 법칙에 따라 탄성변형을 하게 되며 항복점을 넘어서는 순간 소성변형이 시작

$$\sigma = E\varepsilon, \quad \text{when } \sigma \leq \sigma_Y$$

$$\sigma = \sigma_Y, \quad \text{when } \varepsilon \geq \frac{\sigma_Y}{E}$$

$$\varepsilon_{tot} = \varepsilon_e + \varepsilon_p = \frac{\sigma_Y}{E} + \varepsilon_p$$

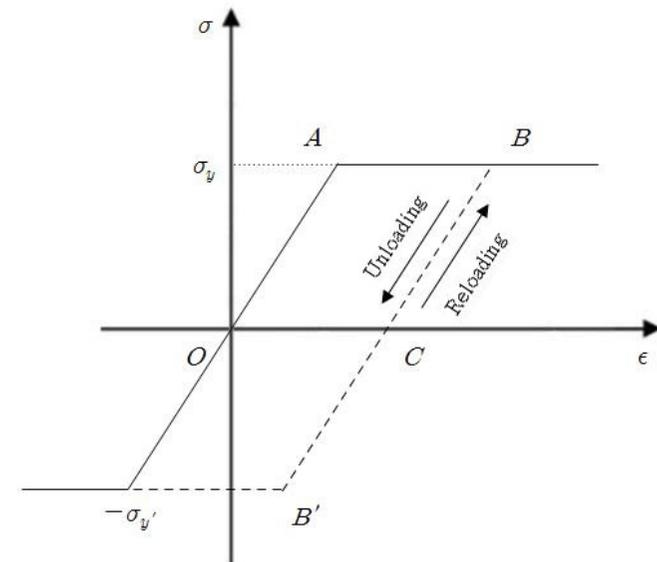
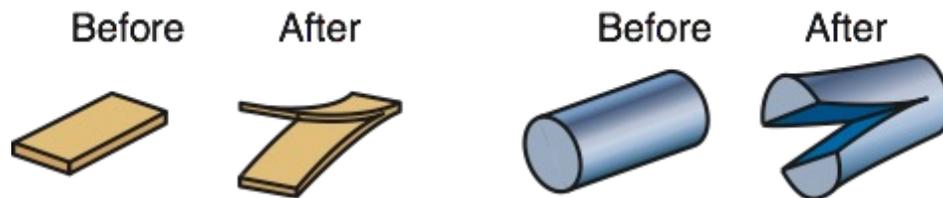


선형 탄성-소성 모델: 2. 탄성-완전소성 모델

- OA 경로를 따라 하중이 증가 → A점에서 항복점 → AB 경로를 따라서 소성 변형이 발생 → B점 → B점에서는 하중이 제거 → 탄성비례 직선과 동일한 기울기를 가지는 경로 BC를 따라서 원점에 이룸 → C점에서의 소성변형은 OC가 되어 영구변형으로 남음.
- 인장 (경로 OA)과 압축(경로 BB') 과정에서 항복강도 Y 가 동일한 값을 갖도록 가정하였으므로 **Bauschinger 효과는 무시.**

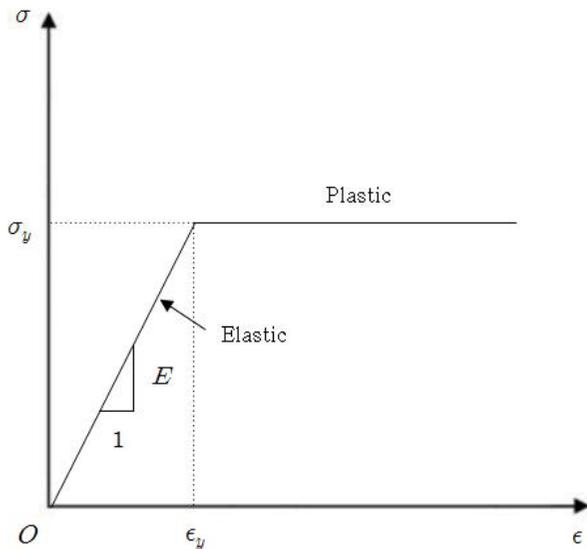
잔류응력

- 영구변형으로 인하여 재료 내부에는 남게 되는 응력



예제 1.

5.1. 초기 길이 $I_0 = 3m$ 이며 단면적이 $A = 100 mm^2$ 인 봉을 $\Delta I = 8 mm$ 만큼 신장 시키고 하중을 제거 하였다. $E = 200 GPa$, 항복강도 $Y = 260 MPa$ 이며 탄성-완전 소성 모델을 사용하여 소성 변형률 ϵ_p 과 봉에서 소성 변형으로 변환된 길이의 변화량 ΔI_p 를 계산하시오



전체 변형률

$$\epsilon = \frac{\Delta I}{I_0} = \frac{8 mm}{3 \times 10^3 mm} = 2666.67 \mu$$

탄성 변형률

$$\epsilon_e = \frac{\sigma_Y}{E} = \frac{260 \times 10^6 Pa}{200 \times 10^9 Pa} = 1300.00 \mu$$

소성 변형률

$$\epsilon_p = \epsilon - \epsilon_e = 2666.67 \mu - 1300.00 \mu = 1366.67 \mu$$

길이 변화량

$$\Delta I_p = \epsilon_p I = 1366.67 \times 10^{-6} m \times 3 m = 4.10 mm$$



선형 탄성-소성 모델: 3. 강체 모델

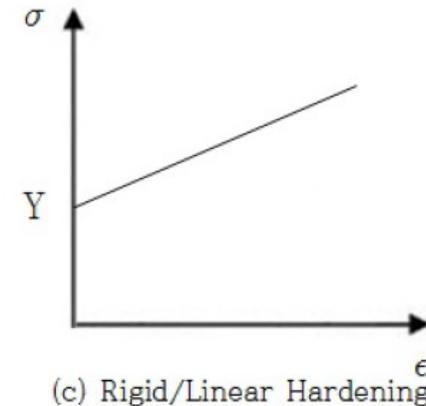
강체-선형 변형 경화 모델

- 항복점 이하에서는 변형이 전혀 일어나지 않다가 항복점을 넘어서면 선형적으로 변형경화가 발생

$$\varepsilon_e = 0, \quad \text{when } \sigma \leq \sigma_Y$$

$$\varepsilon_p = \frac{\sigma - \sigma_Y}{H}, \quad \text{when } \sigma > \sigma_Y$$

H : 경화계수

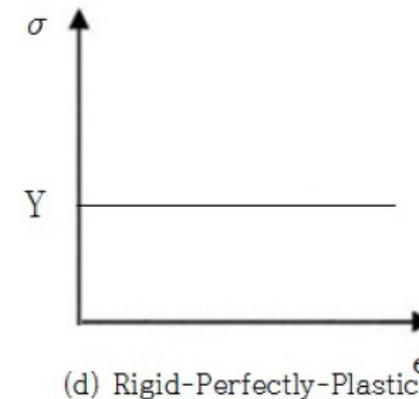


강체-완전 소성 모델

- 탄성변형이 무시되고 항복점을 넘어서면 그대로 소성변형이 발생

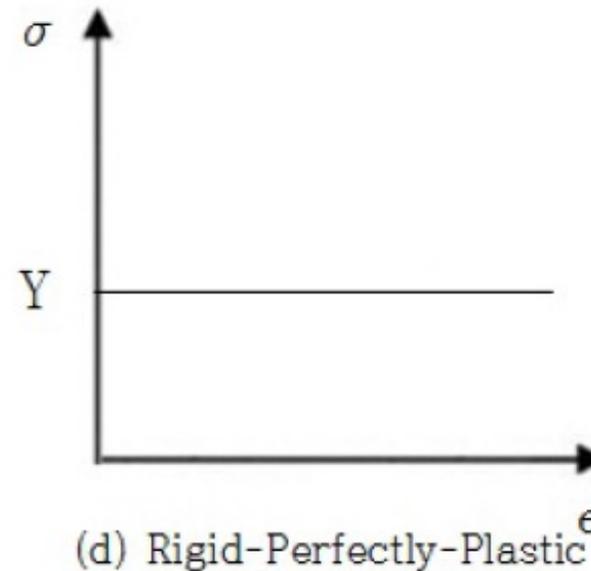
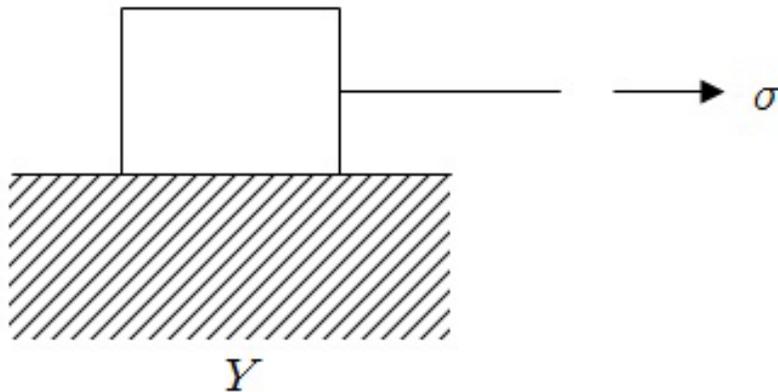
$$\varepsilon_e = 0, \quad \text{when } \sigma \leq \sigma_Y$$

$$\varepsilon_p = \varepsilon_p, \quad \text{when } \sigma > \sigma_Y$$



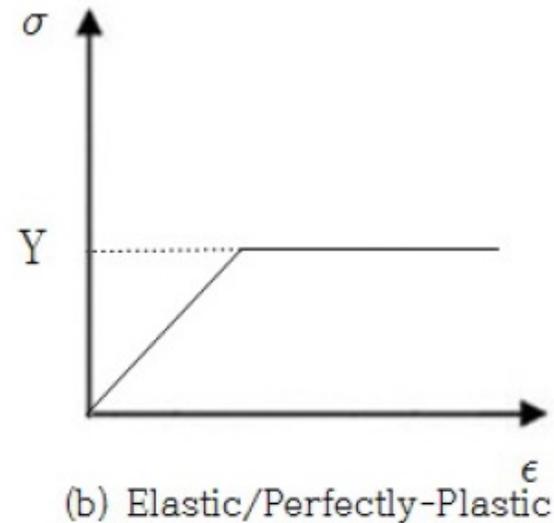
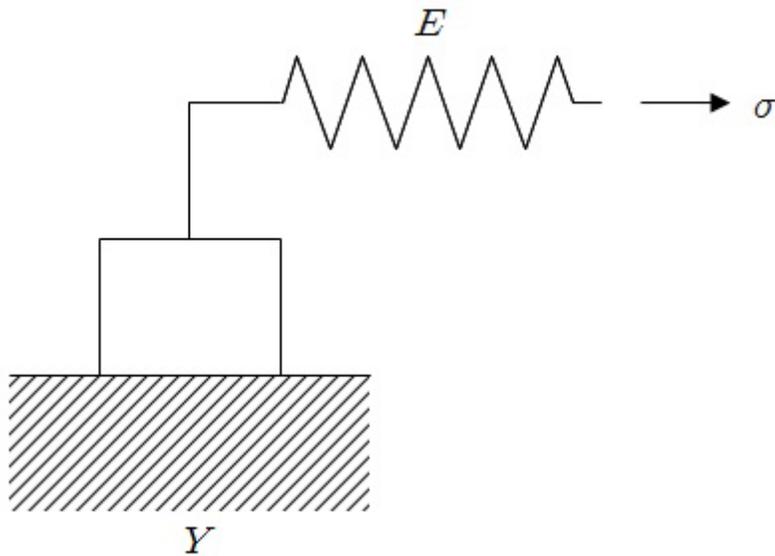
마찰 벽돌 모델 (Friction brick model) - 1

- 강체-완전 소성 모델의 물리적 해석
- 소성모델을 **물리적인 요소를 도입하여 설명하면 수식적인 방법보다 쉽게 이해될 수 있음.**
- 마찰이 있는 평면에 벽돌을 놓아두고 잡아 당기면 어느 정도까지는 벽돌이 움직이지 않다가 그 선을 넘어가면 갑자기 움직이게 됨. 벽돌을 잡아당기던 손을 놓아도 벽돌은 원래의 위치로 돌아가지 않고 그 자리에 머물게 됨 → 영구변형 (or 소성변형)



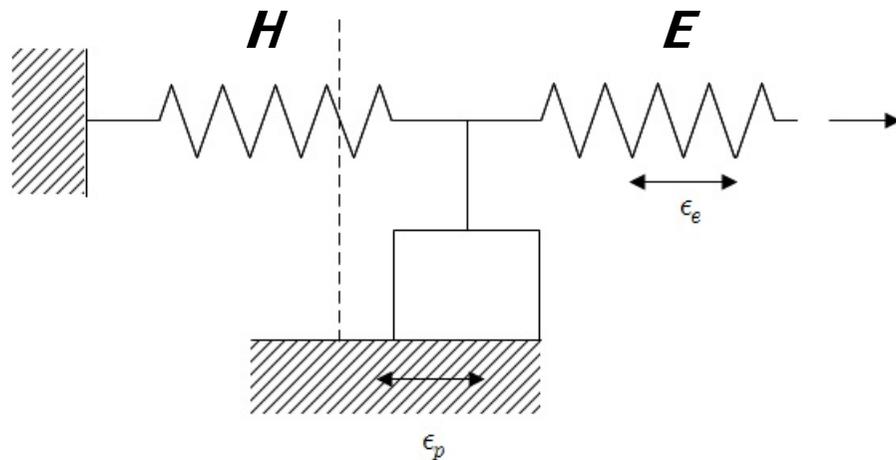
마찰 벽돌 모델 (Friction brick model) - 2

- 탄성-완전 소성 모델의 물리적 해석
- 마찰이 있는 평면에 벽돌을 놓아두고 잡아 당기면 어느 정도까지는 벽돌이 움직이지 않다가 그 선을 넘어가면 갑자기 움직이게 됨 → 탄성변형 + 영구변형



마찰 벽돌 모델 (Friction brick model) - 3

- 탄성-변형경화 모델의 물리적 해석
- 첫번째 스프링은 E , 두번째 스프링은 H 의 스프링 계수를 갖는다.
- 초기에는 벽돌은 움직이지 않고 첫번째 스프링으로 인해서 탄성변형 ϵ_e 가 생성.
- 하중이 항복강도 σ_Y 에 다다르면 벽돌이 움직이게 되고
- 계속적으로 움직이게 하기 위해서는 하중도 계속 증가되어야 한다. 이때 하중은 벽돌을 움직이는 부분과 두번째 스프링을 변형시키는데 사용된다.
- 즉, 가해지는 응력 σ 에서 벽돌을 움직이게 하는 σ_Y 부분을 제외한 초과응력(over stress) $\sigma - \sigma_Y$ 가 두번째 스프링을 변형시키며 변형경화를 일으키는데 사용됨



$$\sigma - \sigma_Y = H \epsilon_p$$

$$\epsilon_{tot} = \epsilon_e + \epsilon_p = \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma - \sigma_Y}{H}$$

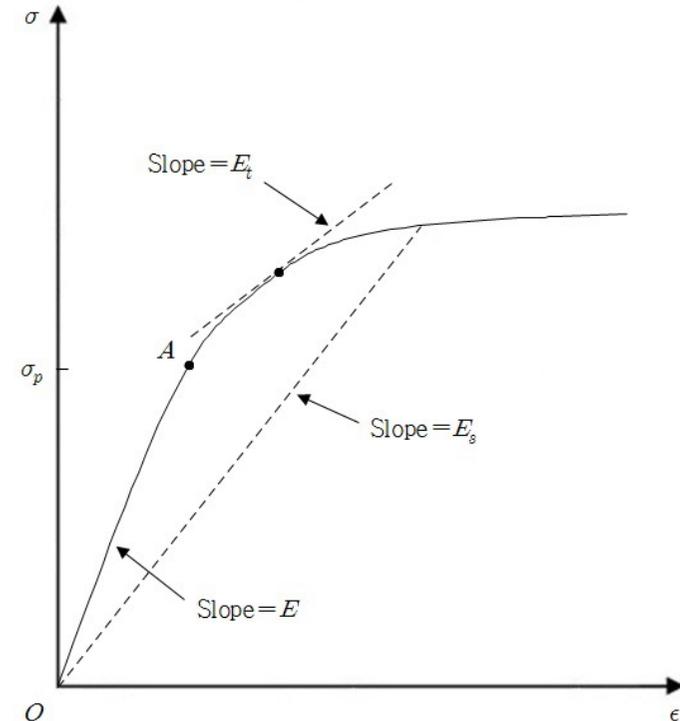
$$d\epsilon_{tot} = \frac{1}{E} d\sigma + \frac{1}{H} d\sigma$$

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon} = \frac{EH}{E + H}$$

비선형 탄소성 모델: 1. 접선계수와 시컨트 계수로 표현

비선형 탄소성 모델

- 실제 인장시험에서 나온 자료를 바탕으로 보다 근사한 곡선으로 탄성-변형률 선도를 묘사하고자 하는 목적으로 개발
- 비선형 재료 모델에서 탄성 변형을 이루는 비례한도를 넘어서는 부분에서의 기울기는 접선계수(tangent modulus) E_T 와 시컨트 계수(secant modulus) E_S 의 두 가지 방법으로 정의



비선형 탄소성 모델: 1. 접선계수와 시컨트 계수로 표현

접선 계수

- 탄성영역에서는 Hook의 법칙에 따라 응력의 증분 $d\sigma$ 과 변형률 증분 $d\varepsilon_e$ 의 관계

$$d\sigma = E d\varepsilon_e$$

- 소성변형에서의 한 지점에서 응력의 증분 $d\sigma$ 은 변형률의 증분 $d\varepsilon$ 과 다음과 같은 관계

$$d\sigma = H d\varepsilon_p \quad d\sigma = E_T d\varepsilon$$

$$d\varepsilon = \frac{d\sigma}{E_T} \quad d\varepsilon_p = \frac{d\sigma}{H}$$

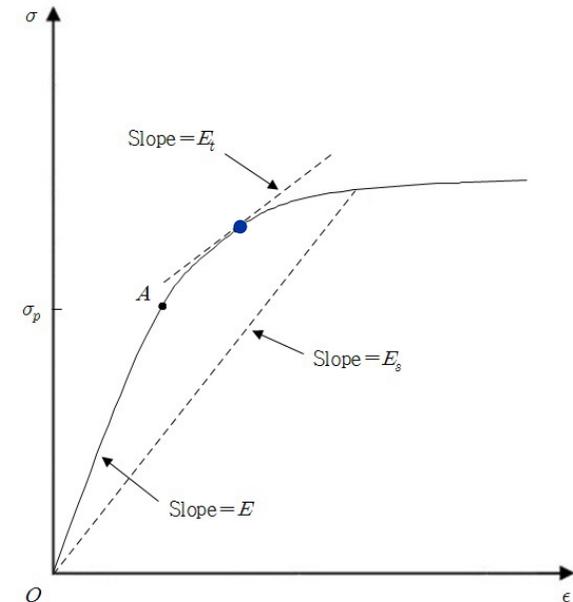
$$d\varepsilon = d\varepsilon_e + d\varepsilon_p$$

$$d\varepsilon_e = \frac{d\sigma}{E}$$

$$\frac{d\sigma}{E_T} = \frac{d\sigma}{E} + \frac{d\sigma}{H}$$

$$\frac{1}{E_T} = \frac{1}{E} + \frac{1}{H}$$

$$E_T = \frac{EH}{E + H}$$



시컨트 계수

$$E_s = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

탄성한계 내에서는 $E = E_s = E_T$

비선형 탄소성 모델: 2. Ramberg-Osgood 모델

Ramberg-Osgood 모델

- 비선형 모델은 주로 멱함수 형태로 제시되는데 응력과 변형률 축에 각각 \log 를 취하면 직선의 형태가 되므로 시험 자료와 비교하기 편리

$$\sigma = K(\varepsilon_p)^n \quad K:\text{강도계수}, \quad n:\text{변형경화 지수}$$

- 위 식에 \log 를 취하면 직선의 방정식을 얻음

$$\log \sigma = \log K + n \log \varepsilon_p$$

$$\varepsilon_p = \left(\frac{\sigma}{K}\right)^{1/n}$$

$$\varepsilon_{tot} = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{K}\right)^{1/n}$$

- Ramberg-Osgood 모델에 의한 비선형 응력-변형률 선도에서는 **0.2% 오프셋 변형률 방법을 사용하여 항복강도를 구함.**

$$\sigma_Y = K(0.002)^n$$



비선형 탄소성 모델: 2. Ramberg-Osgood 모델

표 5.1

재료	강도계수, K (MPa)	변형경화 지수, n	파괴 변형률, ϵ_f
AISI 1020	737	0.190	0.960
2024-T4	806	0.200	0.430
7075-T6	827	0.113	0.410
AZ91C-T6	653	0.282	0.004

강도계수 K

K 값은 ϵ_p 에 1을 대입하면 그 때 응력 값임

$$\sigma = K(\epsilon_p)^n \rightarrow \sigma = K(1)^n \rightarrow \sigma = K$$

예제 2.

표 5.1.에서 AISI 1020 강에 대한 시험 자료를 참고하여 Ramberg-Osgood 모델에 의한 파괴 강도 σ_f 를 계산하시오.

$$\sigma_f = K(\varepsilon_p)^n \quad \sigma_f = 737 \text{ MPa}(0.960)^{0.190} = 731.31 \text{ MPa}$$

점탄성 모델

- 폴리머와 같은 재료에서는 하중에 대한 반응이 탄성의 특성과 점성의 특성을 갖추고 있는 경우를 접할 수 있으며 이는 하중의 변화율이 변형 자체에 영향을 주게 될 때 이러한 재료를 **점탄성 재료(viscoelastic materials)**라고 한다. 점탄성 재료는 일반적인 탄성재료와 달리 변형이 **시간**에 따라 달라지는 재료를 의미한다.
- 한편, 재료가 소성변형을 가지며 하중의 변화율에 따라서 반응하는 경우에는 이를 점소성 (**viscoplastic**) 재료라고 한다.

→ 응력 및 변형률의 시간 의존성

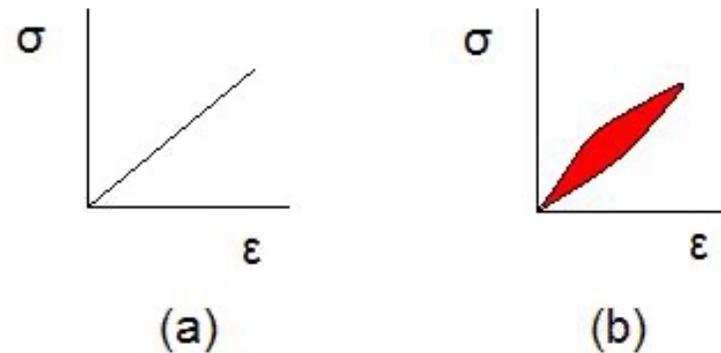


Figure: 점탄성 모델: Maxwell 모델

Stress-strain curves for a purely elastic material (a) and a viscoelastic material (b). The red area is a hysteresis loop and shows the amount of energy lost (as heat) in a loading and unloading cycle. |

점탄성 모델의 예

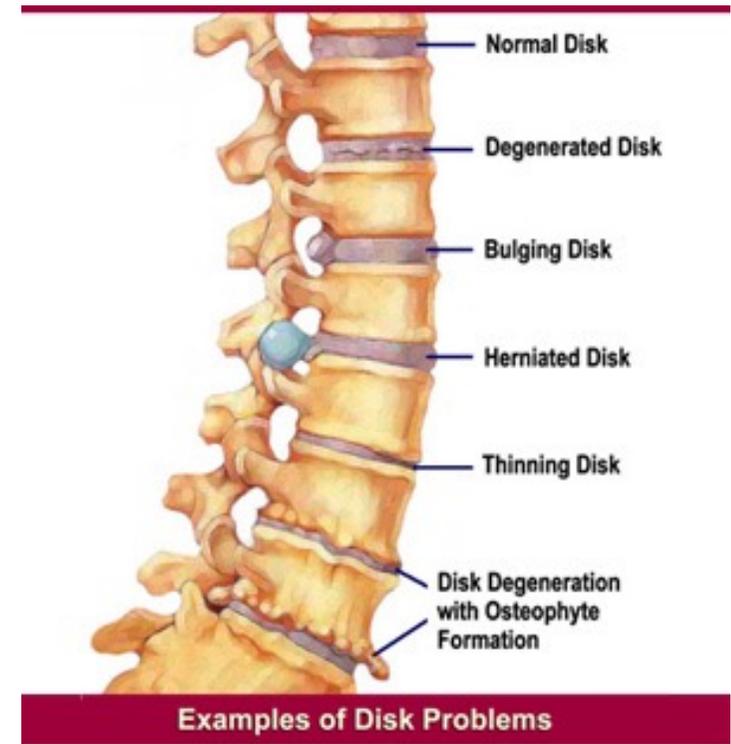


Figure 2.

© www.erikdalton.com

점탄성 모델: 1. Maxwell 모델

- 점탄성 재료에 대한 수학적 모델로서 가장 간단한 것은 분자들의 움직임을 **스프링**과 **댐퍼**를 사용하여 나타내는 것으로 Maxwell 모델이 있다. 점탄성 재료에서 재료의 거동은 상미분 방정식(ordinary differential equations)을 사용하여 나타낼 수 있다.
- 스프링은 외부의 힘에 대하여 즉각적으로 반응하여 변형률 에너지의 형태로 저장되며 Hooke 법칙(선형 탄성)을 따르는 선형 재료의 거동으로 간주한다. **스프링 요소에 의한 응력과 변형률**에 대한 식은 다음과 같다.

$$\sigma = E\varepsilon$$



Figure: 점탄성 모델: Maxwell 모델

점탄성 모델: 1. Maxwell 모델

- 한편, Newton 유체와 같이 반응하는 변형에 대해서는 **댐퍼(damper)**를 사용하여 응력은 변형률 ε 가 아닌 변형속도 $\dot{\varepsilon}$ 에 비례하게 되므로 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon} \quad \eta : \text{점성 (viscosity)}$$

- Maxwell 모델에서는 **스프링과 댐퍼가 직렬로 연결되어 있음.**
- 스프링과 댐퍼의 요소에 작용하고 있는 **응력은 동일하나,**
- 전체 변형률은 **스프링 요소와 댐퍼 요소에서의 변형률을 더한 것과 같음**

$$\sigma = \sigma_s = \sigma_d$$

s : spring, d : damper

$$\varepsilon = \varepsilon_s + \varepsilon_d$$

점탄성 모델: 1. Maxwell 모델

- 앞식의 양변을 시간으로 미분하고 정리하면 다음과 같음

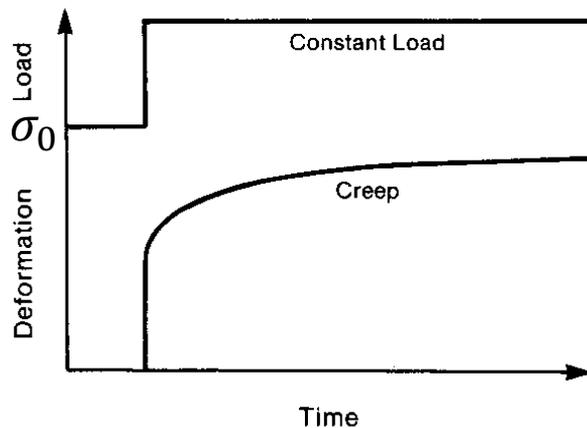
$$\varepsilon = \varepsilon_s + \varepsilon_d$$

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_s + \dot{\varepsilon}_d = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}$$

- 보는 바와 같이 점탄성 재료에 대해서는 선형 탄성 재료에서와 달리 응력-변형률 관계식이 **미분 방정식**의 형태로 주어지며 특정한 초기 조건을 부가하면 미분방정식의 해를 구하는 방식으로 **점탄성 모델에 대한 응력-변형률 관계식**을 구할 수 있음.

크리프

- 재료에 작용하는 **하중이 일정함에도 불구하고 변형이 계속되는 성질**을 말한다.
- 주로 재료의 용융점의 50% 이상 되는 온도에서 크게 나타나며 시간이 지남에 따라 **변형이 증가하는 성질**을 보인다.
- 이와는 **반대로** 변형이 되지 않도록 고정하고 있음에도 불구하고 **재료내의 응력이 시간이 지남에 따라 감소하는 경향**을 보이는데 이를 **응력완화 (stress relaxation)**라고 하며 이러한 현상은 재료 내부에서의 **크리프 현상**으로 인한 것으로 설명되고 있다.



When a body is loaded (or stressed) and the stress is held constant, the body continues to deform (or strain) with time.

크리프 모델

- 크리프 시험(creep test)은 점탄성 재료에 대한 가장 보편적인 인장 시험이며 응력을 갑자기 작용시키고 그대로 유지하면서 재료의 거동을 관찰하는 것이다.
- **일정 크기의 응력 σ_0** 가 $t = 0$ 에서 부과된 경우에 있어서 응력-변형을 관계식을 유도하기 위하여 이전 식을 시간에 대한 미분항으로 고쳐 쓰면 다음과 같다.

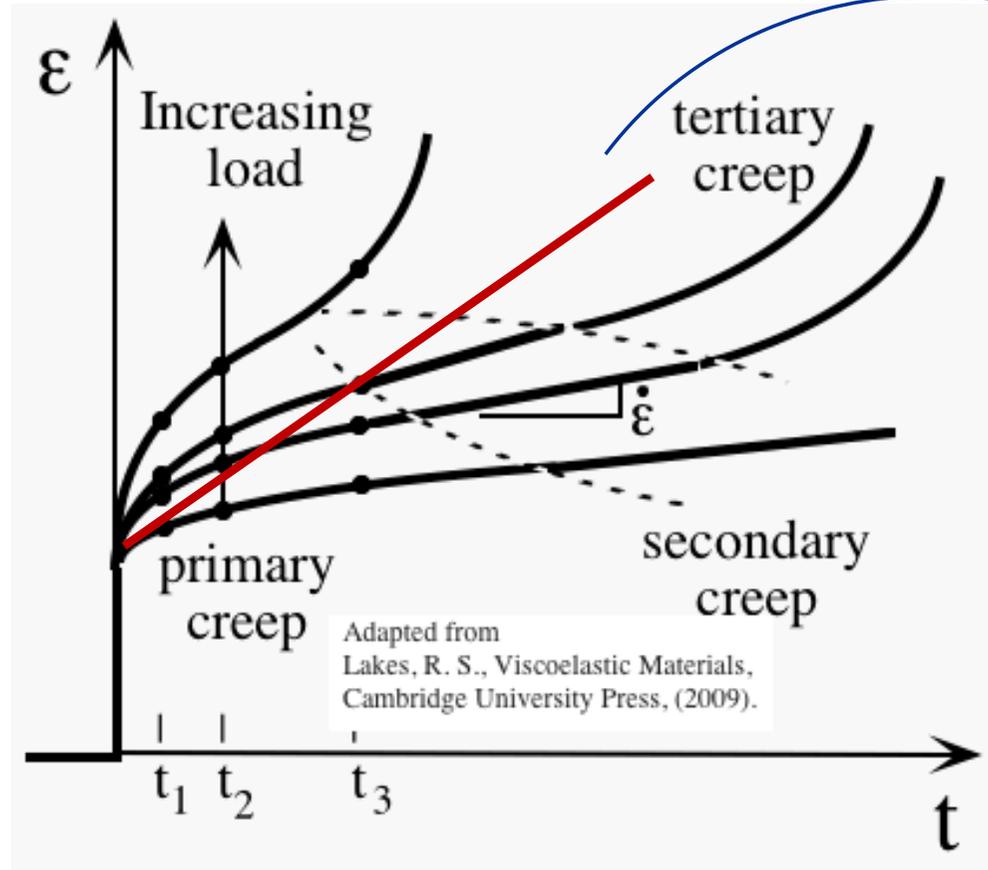
$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{\eta}$$

- 양변에 dt 를 곱하고 적분을 수행하면.

$$d\varepsilon = \frac{1}{E} d\sigma + \frac{\sigma}{\eta} dt$$

$$\int_0^\varepsilon d\varepsilon = \int_0^{\sigma_0} \frac{1}{E} d\sigma + \int_0^t \frac{\sigma}{\eta} dt \quad \rightarrow \quad \varepsilon(t) = \sigma_0 \left(\frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \right)$$

크리프에서 Maxwell 모델

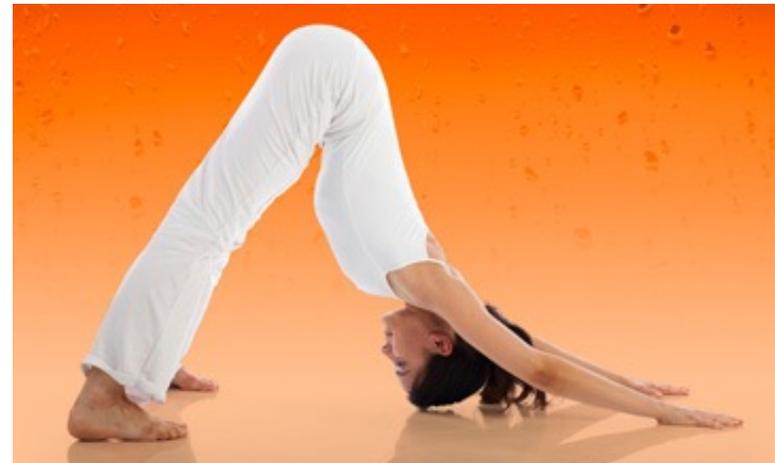
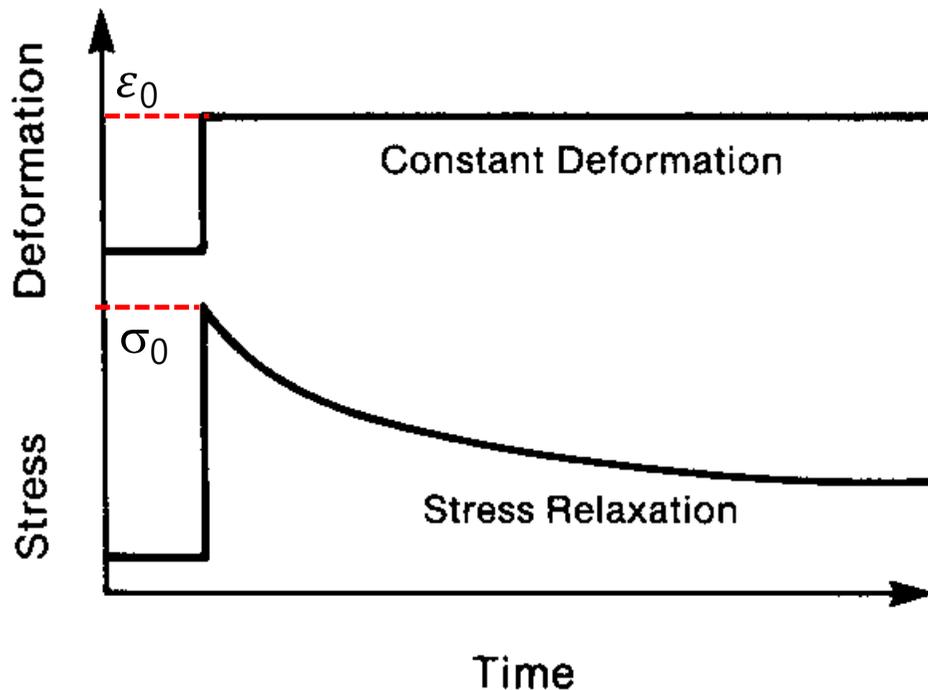


$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0}{\eta}t$$

- 실제 크리프 변형률은 시간에 따라 감소하는 반면 Maxwell 식에서는 일정한 직선관계인 것으로 표현되는 것이 **한계점**임.

응력완화 시험 (Stress relaxation test)

- 완화 시험(relaxation test)은 크리프 시험과 함께 점탄성 재료의 거동을 알아보기 위하여 널리 사용된다. 완화시험에서는 변형률이 주어지는 경우로서, 시간에 따른 응력의 변화를 관찰하게 된다. 예를 들어 시간에 따른 변화가 없는 일정 크기의 변형률이 $t = 0$ 에서 ε_0 로 갑자기 주어진다면 변형률에 대한 시간 미분은 $\dot{\varepsilon} = 0$ 이 됨 (constant strain).



When a body is deformed (or strained) and that deformation (or strain) is held constant, stresses in the body reduce with time.

응력완화 시험에서 Maxwell 모델

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_s + \dot{\varepsilon}_d = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta}$$

$$0 = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \quad \rightarrow \quad 0 = \frac{d\sigma}{dt} \frac{1}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \quad \rightarrow \quad \frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{E}{\eta} dt$$

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\sigma}{\sigma} = -\int_0^t \frac{E}{\eta} dt \quad \rightarrow \quad \ln \left[\frac{\sigma(t)}{\sigma_0} \right] = -\frac{E}{\eta} t$$

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{-\left(\frac{E}{\eta}\right)t} = E \varepsilon_0 e^{-\left(\frac{E}{\eta}\right)t}$$

크리프와 응력완화 시험

- 크리프와 응력완화는 같은 현상이라고 볼 수 있으며 **전자는 응력이 일정한 상태로 유지되는 경우이며 후자는 변형률이 일정하게 유지되는 경우임.**
- 스프링 요소는 탄성 변형을 댐퍼 요소는 크리프나 응력완화에 따른 조건을 대표한다고 볼 수 있다. 재료에 갑자기 응력이 가해지면 먼저 스프링 요소가 변형을 보이게 되며 시간이 어느 정도 지나게 되면 댐퍼 요소에서도 변형이 일어남
- 댐퍼에서의 변형이 시작되면 스프링 요소에서의 변형이 감소하게 되는데 이는 전체 변형률 ε 은 일정하게 유지되기 때문이다. 따라서 전체 변형률 ε 을 탄성변형률 ε_e 와 크리프에 의한 변형률 ε_c 의 합으로 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_c$$

점탄성 모델: 2. Kelvin 모델

- Kelvin-Voigt 모델: 스프링 요소와 댐퍼 요소가 **병렬로 연결되어 있는 형태**
- 응력은 스프링 요소와 댐퍼 요소에 각각 작용하게 되어 **전체 응력은 두 요소에서 각각 작용하는 응력의 합**이 되며 ($\sigma = \sigma_s + \sigma_d$), 이때의 **전체 변형률은 스프링 요소와 댐퍼 요소에서 동일한 값**을 갖게 된다 ($\varepsilon = \varepsilon_s = \varepsilon_d$)
- 스프링 요소에 의한 탄성 변형과 연관된 응력 $\sigma_s = E\varepsilon_s$ 로 표시할 수 있음.
- 댐퍼 요소에 의한 응력은 $\sigma_d = \eta\dot{\varepsilon}_d$ 이 되므로 전체 응력 σ 는 다음과 같음

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_s + \sigma_d \\ &= E\varepsilon_s + \eta\dot{\varepsilon}_d\end{aligned}$$

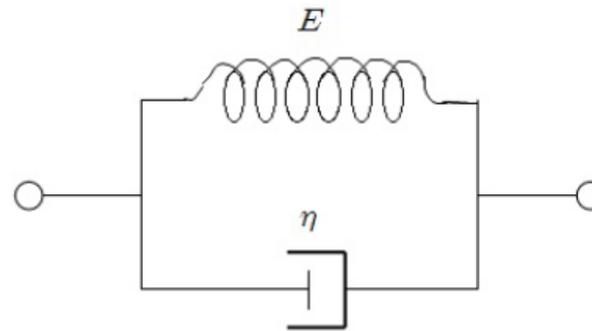


Figure: 점탄성 모델: Kelvin 모델

크리프에서 Kelvin 모델

- 비제차 미분 방정식이므로 다음과 같이 일반해 ε_h 와 특수해 ε_p 로 나누어서 구할 수 있음.

$$\dot{\varepsilon} + \frac{E}{\eta} \varepsilon = \frac{\sigma}{\eta} \quad \varepsilon = \varepsilon_h + \varepsilon_p$$

$$\varepsilon_h = C e^{-\frac{E}{\eta} t} \quad \varepsilon_p = A + Bt$$

- 특수해를 대입하여 정리하면, 식을 정리하면 다음과 같음.

$$\dot{\varepsilon} + \frac{E}{\eta} \varepsilon = \frac{\sigma}{\eta} \quad \rightarrow \quad B + \frac{E}{\eta} (A + Bt) = \frac{\sigma_0}{\eta} \quad \rightarrow \quad B + \frac{E}{\eta} A + \frac{E}{\eta} Bt = \frac{\sigma_0}{\eta}$$

$$B + \frac{E}{\eta} A = \frac{\sigma_0}{\eta} \quad \frac{E}{\eta} Bt = 0$$

$$\therefore B = 0 \quad \therefore A = \frac{\sigma_0}{E}$$

크리프에서 Kelvin 모델

- 계산된 A와 B를 사용하여 다시 정리하면 다음과 같다.

$$\varepsilon(t) = C e^{-\frac{E}{\eta}t} + \frac{\sigma_0}{E}$$

- 초기 조건 $\varepsilon(0) = 0$ 을 적용하면 미지의 상수 $C = -\sigma_0/E$ 가 되어 이를 대입하면 크리프 시험에서의 Kelvin 재료의 거동을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} (1 - e^{-\frac{E}{\eta}t})$$

Maxwell 모델

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{\sigma_0}{\eta} t$$

- Kelvin 재료의 거동은 시간증가에 따른 변형률 속도의 변화를 감지하기 쉬어 **크리프 예측에**서 **Maxwell 모델보다 우수함**. 그러나, **응력완화에서는 Maxwell 모델이 더 적합함**.

크리프에서 Kelvin 모델

- 만일 응력이 $t = 0$ 에서 $\sigma = 0$ 이며 $t = \tau$ 에서 $\sigma = \sigma_0$ 으로 선형적으로 증가하게 되면 시간에 대한 응력 변화는 다음과 같이 주어진다.

$$\sigma(t) = \frac{\sigma_0}{\tau} t \quad (0 \leq t \leq \tau)$$

- 식 (52)을 식 (43)에 대입하고 변형률로 정리하면 다음과 같다.

$$\dot{\varepsilon} + \frac{E}{\eta} \varepsilon = \frac{\sigma}{\eta} \quad \rightarrow \quad \dot{\varepsilon} + \frac{E}{\eta} \varepsilon_c = \frac{\sigma_0}{\eta\tau} t$$

- 초기 조건 $\varepsilon(0) = 0$ 을 사용하여 변형률을 구하면 다음과 같다.

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E\tau} \left[t - \frac{\eta}{E} \left(1 - e^{-\left(\frac{Et}{\eta}\right)} \right) \right]$$