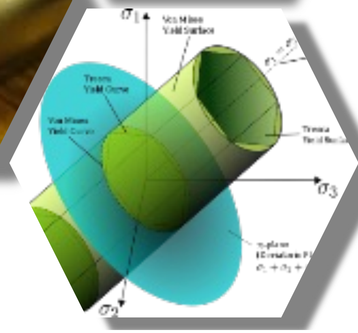
제4장 변형률의 변환



Chapter 1. 요약

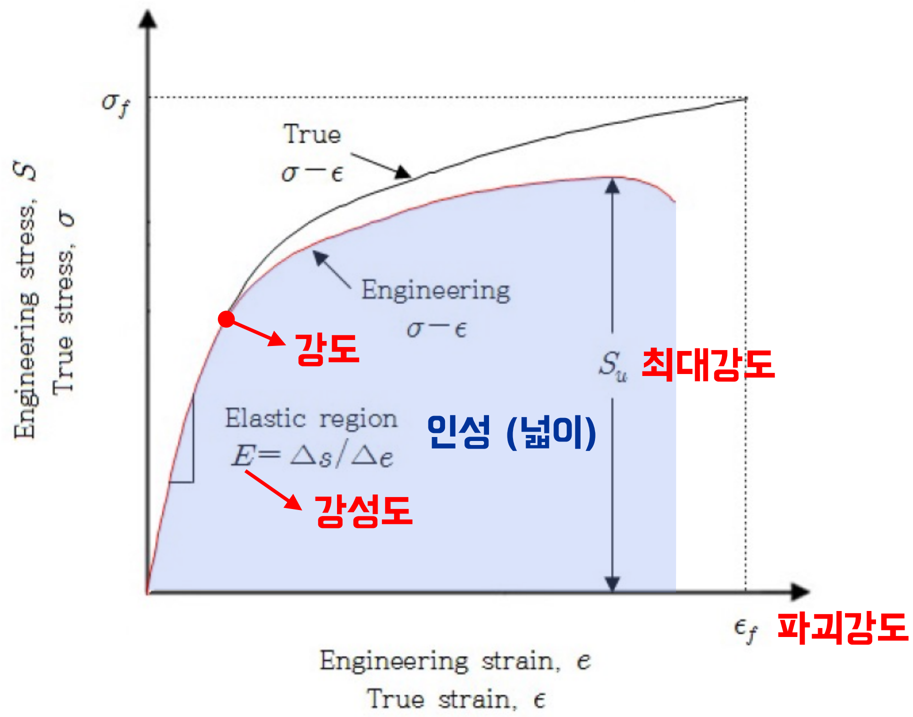
- 재료역학: 외부에서의 힘에 의해서 변형을 공부하는 학문

- 재료의 파손 (Failure)
  - 소성변형 (Plastic deformation)
  - 취성파괴 (Brittlte fracture)
  - 연성파괴 (Ductile fracture)
  - 피로 (Fatique)
  - 크리프 (Creep)
  - 열충격 (Thermal shock)
  - 좌굴 (Buckling)
  - 마모 (Wear)
  - 부식 (Corrosion)

Chapter 2. 요약

재료시험

1. 인장시험 (Tension test)
2. 압축시험 (Compression test)
3. 굽힘시험 (Bending test)
4. 비틀림시험 (Torsion test)
5. 충격시험 (Impact test)
6. 경도시험 (Hardness test)
7. 마모시험 (Wear test)



응력과 변형률 (Stress and strain)

✓ 공칭 응력 (Engineering stress) - 공칭 변형률 (Engineering strain)

✓ 진응력 (True stress) - 진 변형률 (True strain)

TheMAD

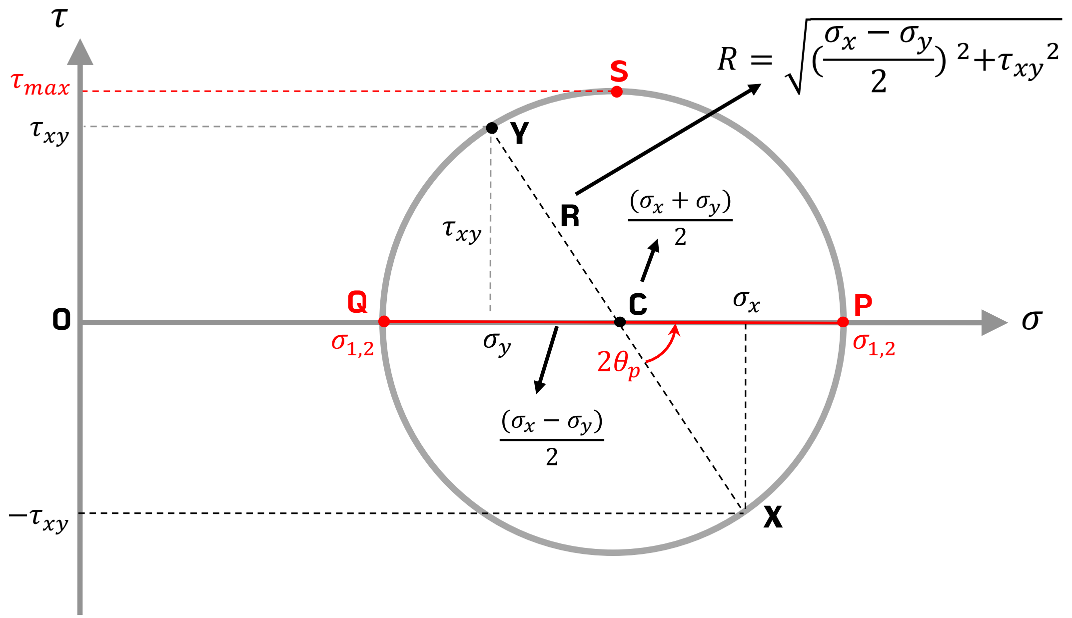
Chapter 3. 요약

- **응력의 요소: 면의 방향 + 응력의 방향 → 행렬화** $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$

- **힘의 평형, 모멘트의 평형 →** $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$

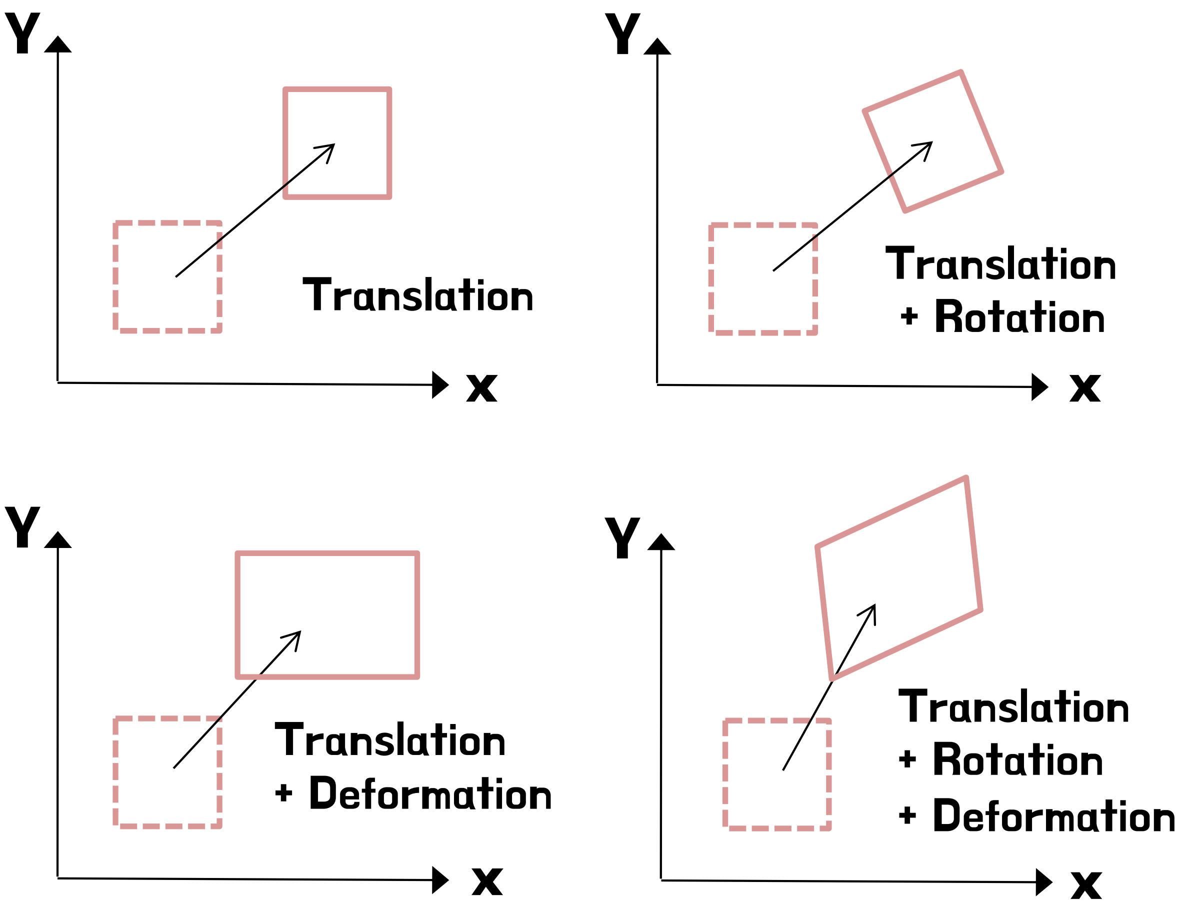
- **응력의 변환** $\begin{bmatrix} \sigma_{x'} \\ \sigma_{y'} \\ \tau_{x'y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos^2\theta & sin^2\theta & 2sin\theta cos\theta \\ sin^2\theta & cos^2\theta & -2sin\theta cos\theta \\ -sin\theta cos\theta & sin\theta cos\theta & cos^2\theta - sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$

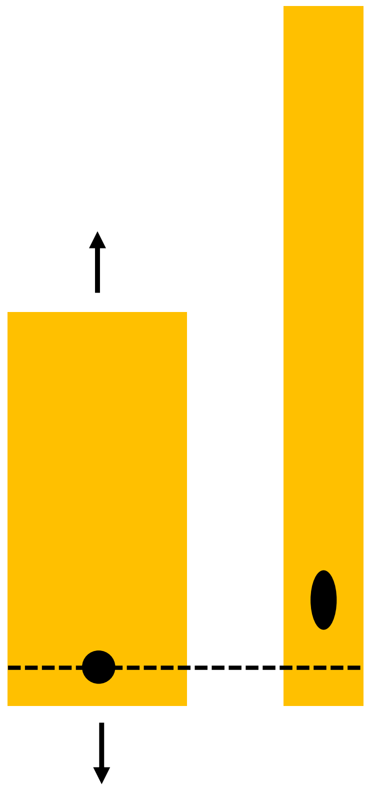
- **Mohr 원**



변위 (Displacement)

- 힘의 작용으로 야기된 물체의 변형거동을 나타내는 정량적 표현
- 벡터 (방향 + 크기)
- 변위의 종류

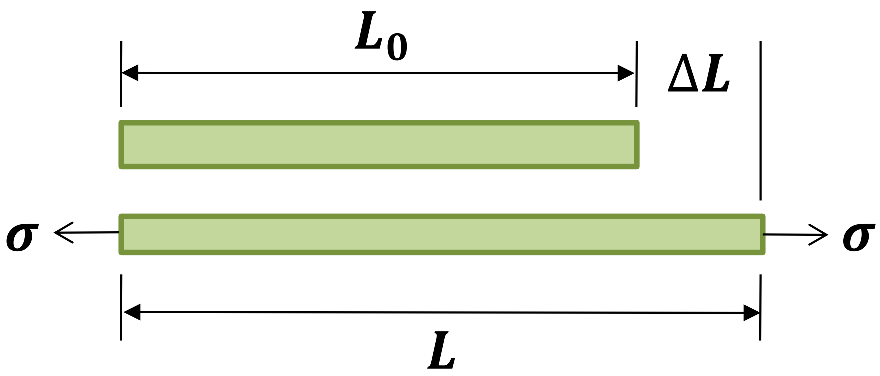




변형률 (Strain)

수직변형률 (ε)

- 수직응력 (σ)의 작용으로 발생
- 수직응력이 작용하는 단면의 법선 방향으로 발생된 단위 길이당 변형
- 인장수직변형률 : (+) , 압축수직변형률 : (-)



$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\Delta L}{L_0}$$

L_0 : 초기 길이

ΔL : σ의 작용으로 발생한 길이 변화

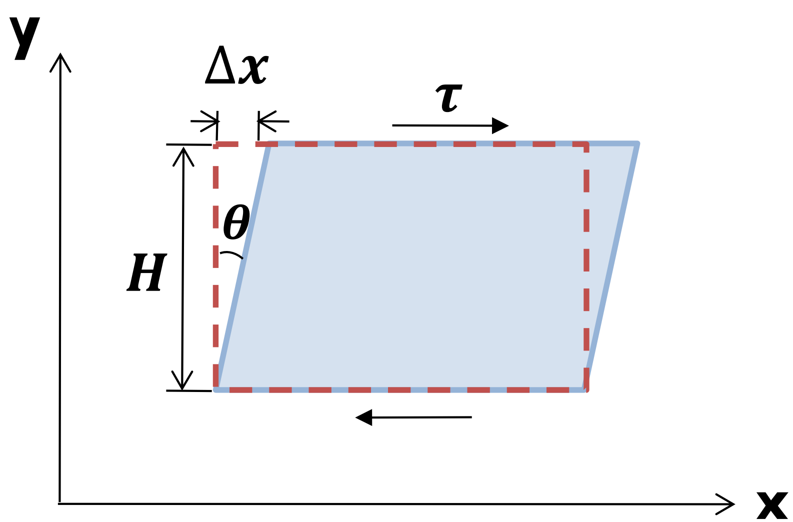
TheMAD

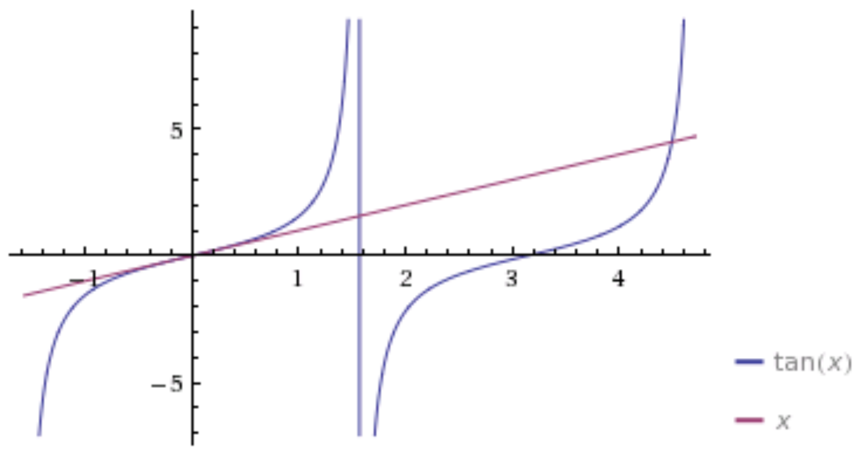
변형률 (Strain)

전단변형률 (γ)

- 전단응력 (τ)에 의해 발생
- 전단응력이 작용하기 전 서로 직교하던 두 선분 사이에서 전단응력의 작용으로 발생한 각도 변화량 (rad, 라디안)

$$\gamma = \frac{\Delta x}{H} \approx tan\theta \approx \theta$$



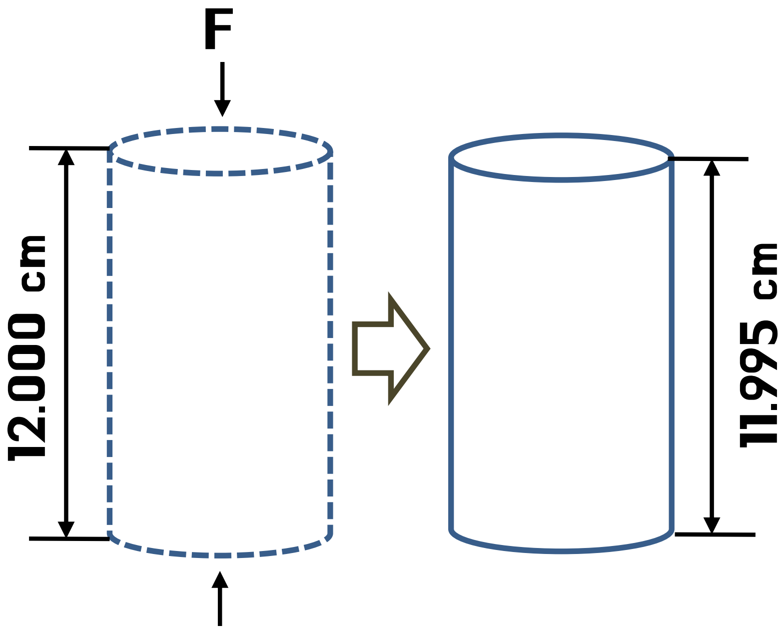


TheMAD

예제 1.

암석시험편에서 발생된 축방향 변형률 산정

- 원주형 암석시험편의 초기 길이 : 12.000 cm
- 축방향 하중을 가한 후 길이 : 11.995 cm

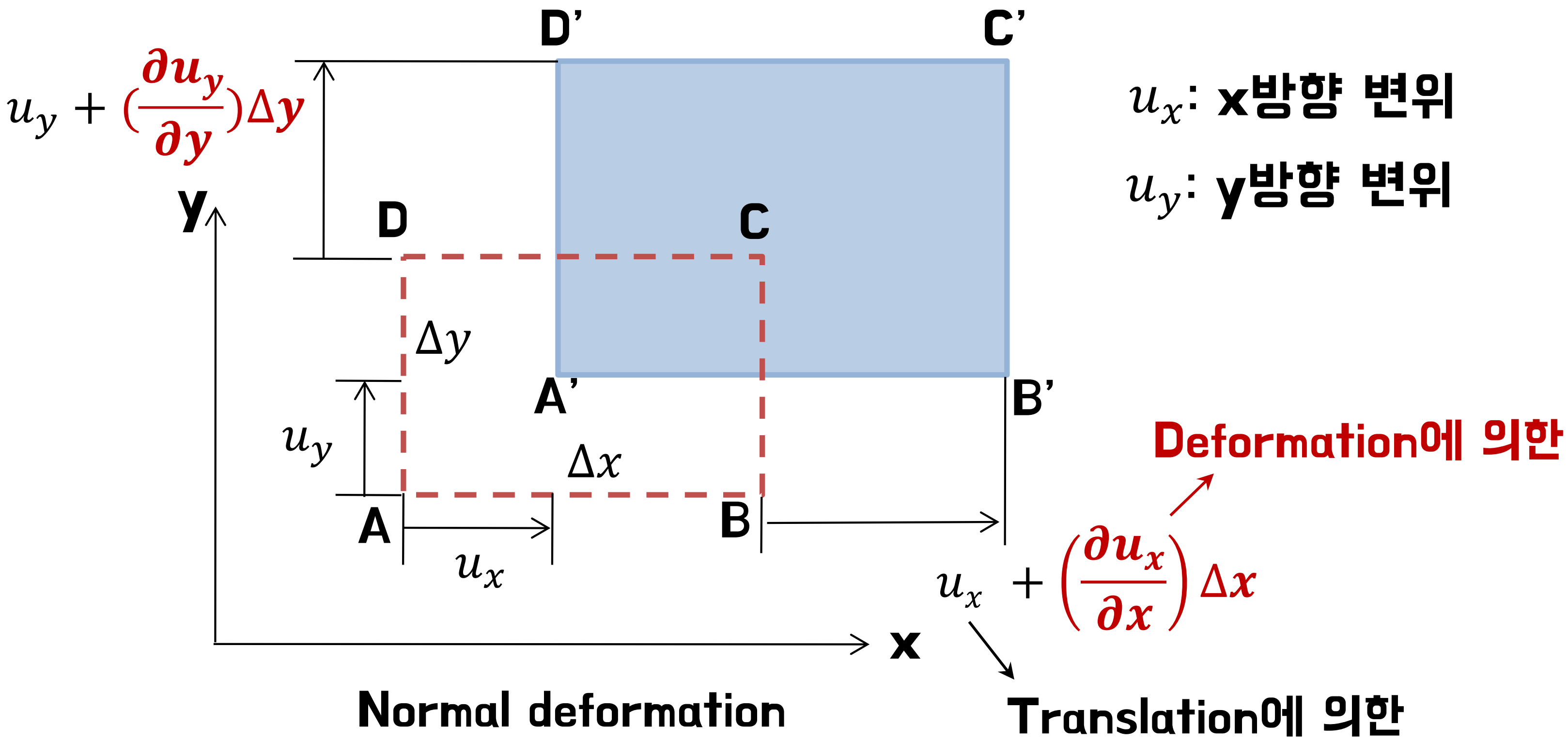


$$\Delta L = 11.995 - 12.000 = -0.005\ cm$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{-0.005\ \cancel{cm}}{12.000\ \cancel{cm}} \approx 4.167 \times 10^{-4}$$

TheMAD

변형률과 변위의 관계



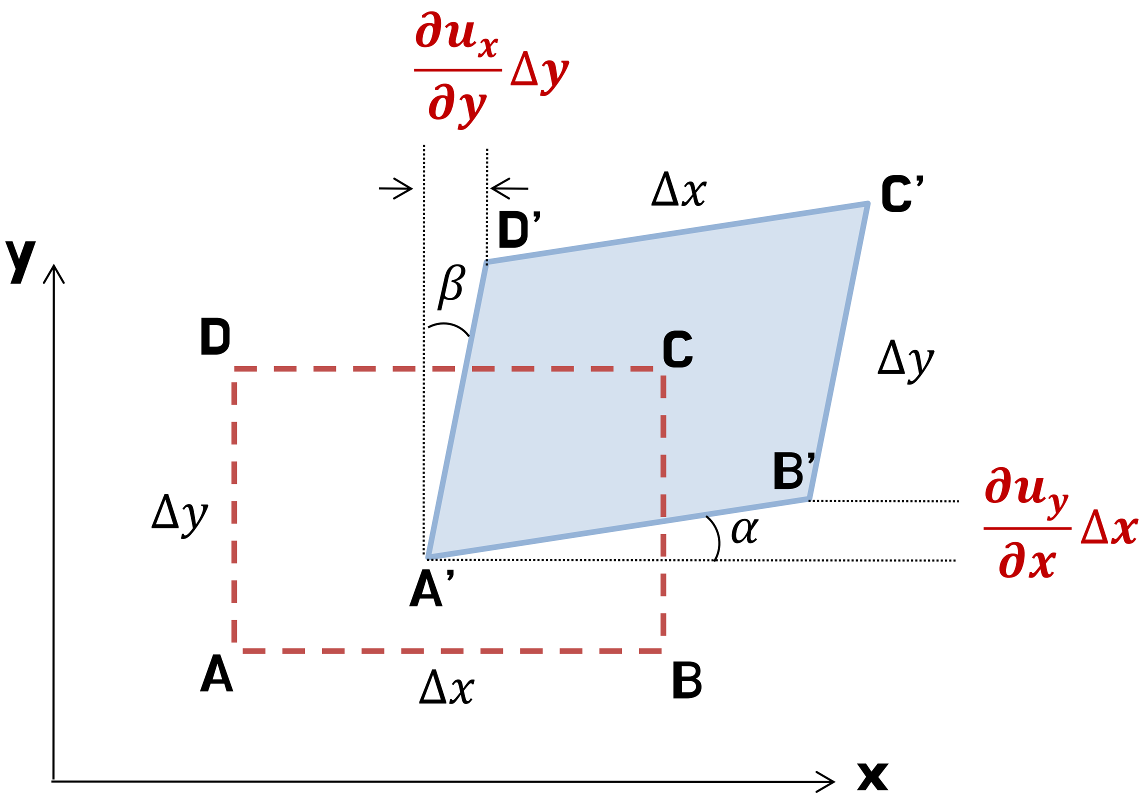
u_x: x방향 변위

u_y: y방향 변위

x 방향 normal strain $\varepsilon_{xx} = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{\left[\Delta x + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)\Delta x\right] - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$

y 방향 normal strain $\varepsilon_{yy} = \frac{A'D' - AD}{AD} = \frac{\left[\Delta y + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)\Delta y\right] - \Delta y}{\Delta y} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$

변형률과 변위의 관계



Shear deformation

u_x: x방향 변위

u_y: y방향 변위

shear strain $\gamma = \alpha + \beta \cong \tan\alpha + \tan\beta$

$$= \frac{\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)\Delta x}{\Delta x} + \frac{\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\Delta y}{\Delta y} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

TheMAD

변형률의 표현 - 행렬 (Matrix)

3차원 공간에서 변형률 표현

- 응력에 의해서 발생하는 모든 방향으로의 변위 (변형률)을 고려해야 함 → 행렬로 표현
- 응력의 표현과 유사함

참고) $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$

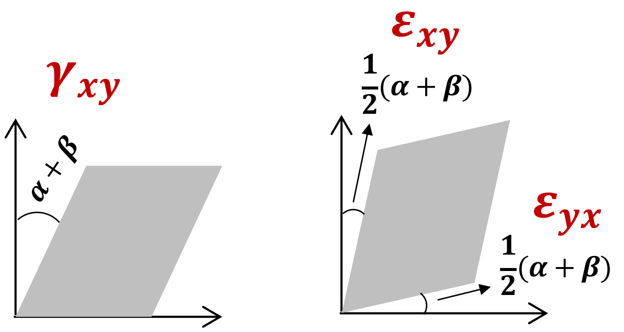
$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx},\ \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy},\ \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz}$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

$$= \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$



TheMAD

2D 공간에서 변형률의 변환

- 응력과 마찬가지로 변형률에서도 임의의 각을 가지고 경사진 평면에서의 변형률을 계산해야 할 필요
- 이를 위해서 기준 축으로 부터 θ의 각도로 기울어진 평면에서의 수직 변형률은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$[\varepsilon]' = [T]_\varepsilon[\varepsilon] \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos^2\theta & sin^2\theta & sin\theta cos\theta \\ sin^2\theta & cos^2\theta & -sin\theta cos\theta \\ -2sin\theta cos\theta & 2sin\theta cos\theta & cos^2\theta - sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x'} &= cos^2\theta \cdot \varepsilon_x + sin^2\theta \cdot \varepsilon_y + sin\theta cos\theta \cdot \gamma_{xy} \\ \varepsilon_{y'} &= sin^2\theta \cdot \varepsilon_x + cos^2\theta \cdot \varepsilon_y - sin\theta cos\theta \cdot \gamma_{xy} \\ \gamma_{x'y'} &= -2sin\theta cos\theta \cdot \varepsilon_x + 2sin\theta cos\theta \cdot \varepsilon_y + (cos^2\theta - sin^2\theta) \cdot \gamma_{xy} \end{aligned} \tag{3}$$

참고) $[T]_\sigma = \begin{bmatrix} cos^2\theta & sin^2\theta & 2sin\theta cos\theta \\ sin^2\theta & cos^2\theta & -2sin\theta cos\theta \\ -sin\theta cos\theta & sin\theta cos\theta & cos^2\theta - sin^2\theta \end{bmatrix}$

TheMAD

2D 공간에서 변형률의 변환

- **식(4)를 삼각함수 공식을 적용하여 다시 쓰면 다음과 같음.**

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}cos2\theta + sin2\theta \cdot \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

$$\varepsilon_{y'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}cos2\theta - sin2\theta \cdot \frac{\gamma_{xy}}{2} \qquad \textbf{(4)}$$

$$\gamma_{x'y'} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y)sin2\theta + cos2\theta \cdot \gamma_{xy}$$

참고)

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}cos2\theta + sin2\theta \cdot \tau_{xy}$$

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}cos2\theta - sin2\theta \cdot \tau_{xy}$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}sin2\theta + cos2\theta \cdot \tau_{xy}$$

주변형률

- 수직변형률은 하중이 작용하고 있는 방향이 기준의 축방향과 일치 → 주변형률 (principal strain)
- 그렇지 않다면 일반적인 수직변형률로 간주하여 사용할 수 있음.
- 전단변형률은 측정하기가 쉽지 않다.
- 그러나 다수의 스트레인 로제트를 사용하여 간접적으로 측정이 가능
- 식(5)를 θ로 미분하면 주응력과 최대 전단응력을 구하는 방식과 같은 방법으로 주변형률(principal strain)과 최대 전단변형률 (maximum shear strain)을 계산할 수 있음.

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} cos2\theta \, + \, sin2\theta \cdot \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

$$\frac{d\varepsilon_x'}{d\theta} = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}(-2sin2\theta_P) + \frac{\gamma_{xy}}{2}(2cos2\theta_P) = 0$$

$$\frac{sin2\theta_P}{cos2\theta_P} = tan2\theta_P = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

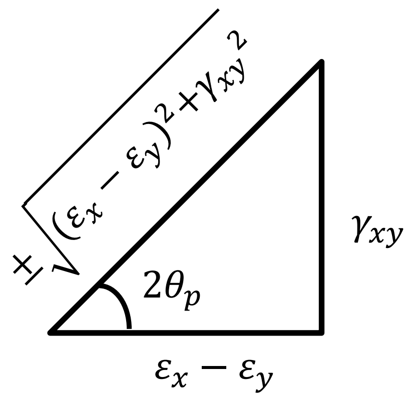
주변형률

- 주 변형률 면의 방향 θ_P 는 다음과 같이 쓸 수 있음
- 여기서 θ_P 에 의해서 설정되는 두 평면을 주평면(principal plane)
- 주평면에서는 전단변형률 γ_{xy} = 0 이다.

$$tan2\theta_P = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \qquad \textbf{(5)}$$

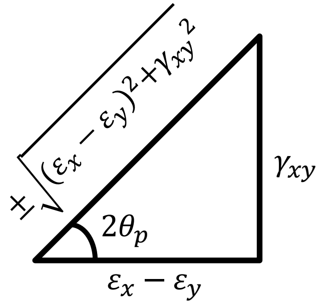
- 식 (5)의 θ_P 를 식(4)에 대입하면, 두 개의 주변형률 ε_1과 ε_2는 다음과 같이 주어짐.

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} cos2\theta + sin2\theta \cdot \frac{\gamma_{xy}}{2}$$



주변형률

- 식 (5)의 θ_P 를 식(4)에 대입하면, 두 개의 주변형률 ε_1과 ε_2는 다음과 같이 주어짐.



$$\varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}cos2\theta + sin2\theta\cdot\frac{\gamma_{xy}}{2}$$

$$= \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cdot\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{\pm\sqrt{(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+{\gamma_{xy}}^2}} + \frac{\gamma_{xy}}{\pm\sqrt{(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+{\gamma_{xy}}^2}}\cdot\frac{\gamma_{xy}}{2}$$

$$= \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} + \frac{(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2}{2}\cdot\frac{1}{\pm\sqrt{(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+{\gamma_{xy}}^2}} + \frac{1}{\pm\sqrt{(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+{\gamma_{xy}}^2}}\cdot\frac{{\gamma_{xy}}^2}{2}$$

$$= \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} + \frac{1}{2}\cdot((\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+{\gamma_{xy}}^2)\cdot\frac{1}{\pm\sqrt{(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+{\gamma_{xy}}^2}}$$

$$= \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} \pm\frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+{\gamma_{xy}}^2}$$

$$= \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} \pm\sqrt{(\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2})^2+(\frac{\gamma_{xy}}{2})^2}$$

$$\therefore \varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} \pm\sqrt{(\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2})^2+(\frac{\gamma_{xy}}{2})^2} \quad \textbf{(6)}$$

참고) $\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+{\tau_{xy}}^2}$

최대전단변형률

- **최대전단변형률 γ_{max}이 발생하는 면의 방향 θ_s은 다음과 같이 주어진다.**

$$\gamma_{x'y'} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y)sin2\theta + cos2\theta \cdot \gamma_{xy}$$

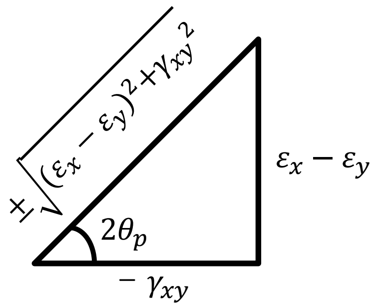
$$\frac{d\gamma_{x'y'}}{d\theta} = -\left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right) \cdot 2cos2\theta_s + (-2) \cdot sin2\theta_s \cdot \gamma_{xy} = 0$$

$$\left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right) \cdot cos2\theta_s = -sin2\theta_s \cdot \gamma_{xy}$$

$$\frac{sin2\theta_s}{cos2\theta_s} = tan2\theta_s = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\gamma_{xy}}$$

- **여기서 θ_s는 전단변형률이 최대가 되는 면의 방향이며, 이를 식 (5)의 전단변형률 항에 대입하면 최대 전단변형률 γ_{max} 는 다음과 같이 주어짐.**

$$\gamma_{x'y'} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y)sin2\theta + cos2\theta \cdot \gamma_{xy}$$

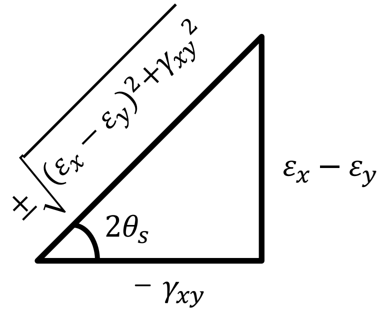


최대전단변형률

- 여기서 θ_s는 전단변형률이 최대가 되는 면의 방향이며, 이를 식 (5)의 전단변형률 항에 대입하면 최대 전단변형률 γ_{max} 는 다음과 같이 주어짐.

$$\gamma_{x'y'} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y)sin2\theta + cos2\theta \cdot \gamma_{xy}$$

$$= -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cdot \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\pm\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + {\gamma_{xy}}^2}} + \frac{-\gamma_{xy}}{\pm\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + {\gamma_{xy}}^2}} \cdot \gamma_{xy}$$



$$= \frac{-(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2}{\pm\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + {\gamma_{xy}}^2}} + \frac{-{\gamma_{xy}}^2}{\pm\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + {\gamma_{xy}}^2}}$$

$$= -\left((\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + {\gamma_{xy}}^2\right) \cdot \frac{1}{\pm\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + {\gamma_{xy}}^2}}$$

$$= \pm\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + {\gamma_{xy}}^2}$$

$$= \pm 2\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}$$

$$\therefore \gamma_{max} = \pm 2\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \qquad \textbf{(7)}$$

참고) $\tau_{max} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + {\tau_{xy}}^2}$

Mohr 원에서의 주변형률

- **평면에서의 주 변형률 ε_1과 ε_2는 다음과 같이 계산된다.**

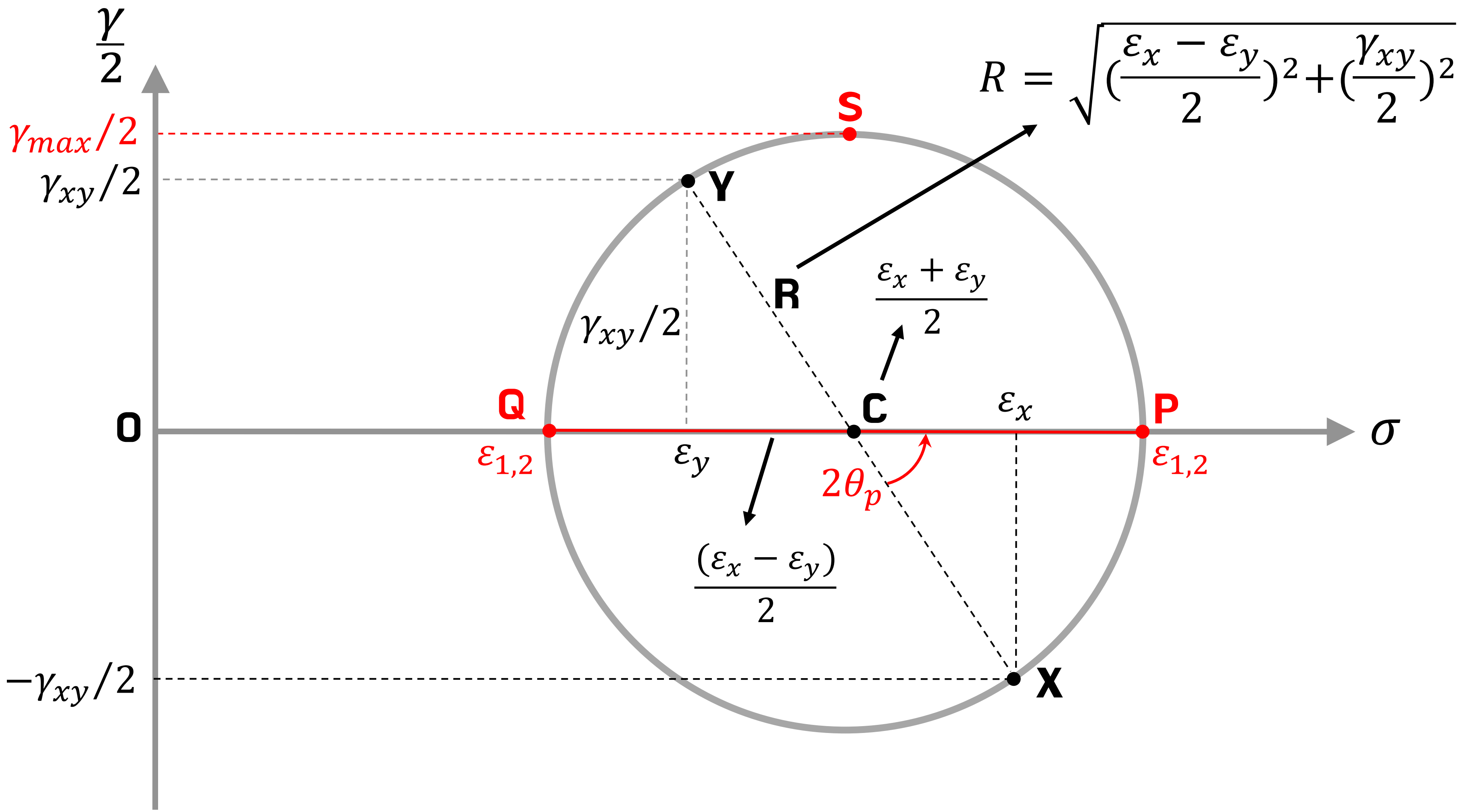
$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2})^2 + (\frac{\gamma_{xy}}{2})^2} \qquad \gamma_{max} = \pm 2\sqrt{(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2})^2 + (\frac{\gamma_{xy}}{2})^2}$$

$$\varepsilon_1 = C + R \qquad \varepsilon_2 = C - R \qquad \textbf{(8)}$$

$$C = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \qquad R = \sqrt{(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2})^2 + (\frac{\gamma_{xy}}{2})^2} \qquad \textbf{(9)}$$

- **평면에 변형률에서도 응력과 유사한 개념으로 중심이 C, 반지름 R인 Mohr 원을 작성**
- **좌표는 $(\varepsilon,\ \gamma/2)$임을 유의**

변형률 성분과 Mohr 원



TheMAD

예제 2.

- $\varepsilon_x = 100\mu, \varepsilon_y = 50\mu, \gamma_{xy} = 20\mu$ **일 때의 반시계 방향으로 45°회전된 평면에서의 변형률** $\varepsilon_{x'}, \varepsilon_{y'}, \gamma_{x'y'}$ **를 계산하시오.**

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos^2\theta & sin^2\theta & sin\theta cos\theta \\ sin^2\theta & cos^2\theta & -sin\theta cos\theta \\ -2sin\theta cos\theta & 2sin\theta cos\theta & cos^2\theta - sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{x'} = cos^2\theta \cdot \varepsilon_x + sin^2\theta \cdot \varepsilon_y + sin\theta cos\theta \cdot \gamma_{xy}$$

$$\varepsilon_{y'} = sin^2\theta \cdot \varepsilon_x + cos^2\theta \cdot \varepsilon_y - sin\theta cos\theta \cdot \gamma_{xy}$$

$$\gamma_{x'y'} = -2sin\theta cos\theta \cdot \varepsilon_x + 2sin\theta cos\theta \cdot \varepsilon_y + (cos^2\theta - sin^2\theta) \cdot \gamma_{xy}$$

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} cos2\theta + sin2\theta \cdot \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

$$\varepsilon_{y'} = \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2} cos2\theta - sin2\theta \cdot \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

$$\gamma_{x'y'} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y)sin2\theta + cos2\theta \cdot \gamma_{xy}$$

예제 2.

- $\varepsilon_x = 100\mu, \varepsilon_y = 50\mu, \gamma_{xy} = 20\mu$ **일 때의 반시계 방향으로 45°회전된 평면에서의 변형률** $\varepsilon_{x'}, \varepsilon_{y'}, \gamma_{x'y'}$**를 계산하시오.**

$$\varepsilon_{x'} = cos^2\theta \cdot \varepsilon_x + sin^2\theta \cdot \varepsilon_y + sin\theta cos\theta \cdot \gamma_{xy}$$

$$\varepsilon_{y'} = sin^2\theta \cdot \varepsilon_x + cos^2\theta \cdot \varepsilon_y - sin\theta cos\theta \cdot \gamma_{xy}$$

$$\gamma_{x'y'} = -2sin\theta cos\theta \cdot \varepsilon_x + 2sin\theta cos\theta \cdot \varepsilon_y + (cos^2\theta - sin^2\theta) \cdot \gamma_{xy}$$

$$\varepsilon_{x'} = cos^2 45° \cdot (100\mu) + sin^2 45° \cdot (50\mu) + sin45° cos45° \cdot (20\mu)$$

$$\varepsilon_{y'} = sin^2 45° \cdot (100\mu) + cos^2 45° \cdot (50\mu) - sin45° cos45° \cdot (20\mu)$$

$$\gamma_{x'y'} = -2sin45° cos45° \cdot (100\mu) + 2sin45° cos45° \cdot (50\mu) + (cos^2 45° - sin^2 45°) \cdot (20\mu)$$

$$\varepsilon_{x'} = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (100\mu) + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (50\mu) + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (20\mu) = 85\mu$$

$$\varepsilon_{y'} = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (100\mu) + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (50\mu) - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (20\mu) = 65\mu$$

$$\gamma_{x'y'} = -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (100\mu) + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (50\mu) + \left(\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\right) \cdot (20\mu) = -50\mu$$

$$\varepsilon_{x'} = 85\mu$$

$$\varepsilon_{y'} = 65\mu$$

$$\gamma_{x'y'} = -50\mu$$

예제 3.

- 아래 그림과 같이 $\varepsilon_x = 340\mu,\ \varepsilon_y = 110\mu,\ \gamma_{xy} = 180\mu$ 일 때 (a) $\theta = 30°$ 회전된 요소, (b) 주변형률 $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2$, (c) 최대전단변형률 γ_{max} 를 계산하시오.

(a) $\theta = 30°$ 회전된 요소

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_{y'} \\ \gamma_{x'y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos^2 30° & sin^2 30° & sin30°cos30° \\ sin^2 30° & cos^2 30° & -sin30°cos30° \\ -2sin30°cos30° & 2sin30°cos30° & cos^2 30° - sin^2 30° \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 340\mu \\ 110\mu \\ 180\mu \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & \sqrt{3}/4 \\ 1/4 & 3/4 & -\sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 340\mu \\ 110\mu \\ 180\mu \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{3}{4}\right) \cdot 340\mu + \left(\frac{1}{4}\right) \cdot 110\mu + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \cdot 180\mu \\ \left(\frac{1}{4}\right) \cdot 340\mu + \left(\frac{3}{4}\right) \cdot 110\mu - \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \cdot 180\mu \\ \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) \cdot 340\mu + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot 110\mu + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 180\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 360.44\mu \\ 89.56\mu \\ -109.19\mu \end{bmatrix}$$

TheMAD

예제 3.

(b) 주변형률 $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2$

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{340\mu + 110\mu}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{340\mu - 110\mu}{2}\right)^2 + \left(\frac{180\mu}{2}\right)^2}$$

$$= 225\mu \pm 146.03\mu$$

$$= 371.03\mu \quad or \quad 78.97\mu$$

(c) 최대전단변형률 γ_{max}

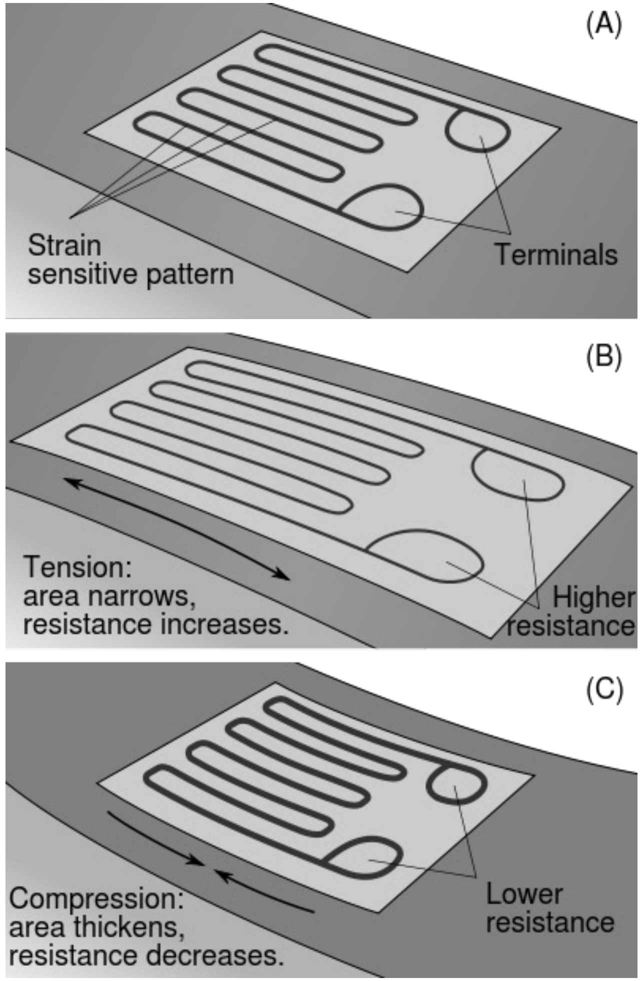
$$\gamma_{max} = \pm 2\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} = \pm 292.06\mu$$

실제 변형률 측정

변형률의 측정 (실제 활용)

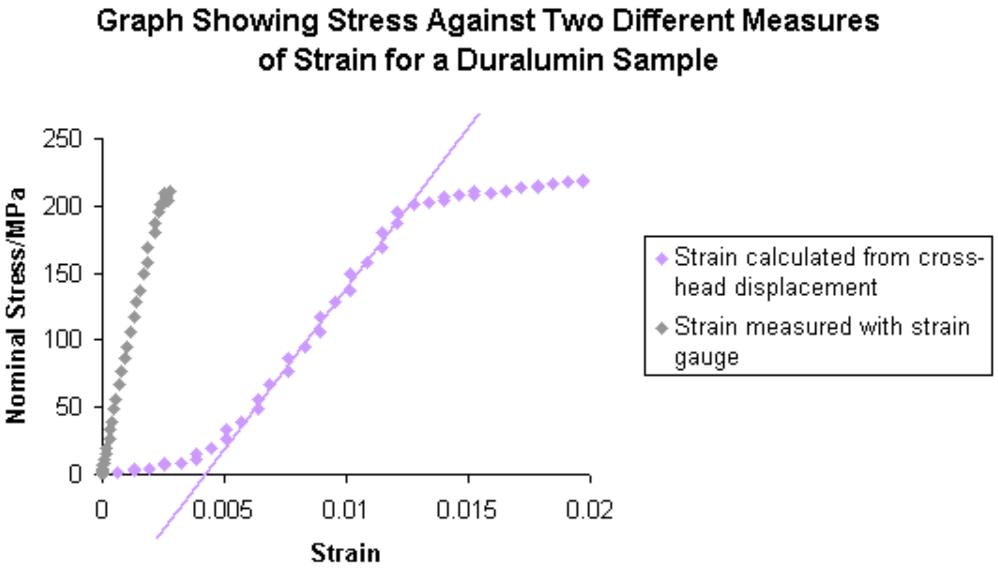
변형률 게이지

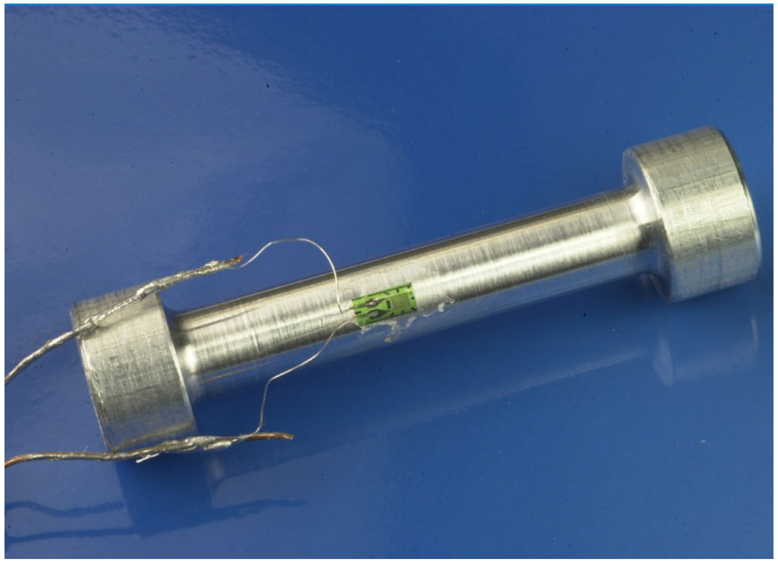
- 응력은 실제로 측정할 수 있는 물리적 양 X
- 변형률을 측정하여 응력을 계산하는 방법을 사용
- 변형률을 측정하기 위한 방법 중에서 변형률 게이지 (strain gauge)가 가장 널리 사용
- 간단한 구조의 장치로서 변형을 측정하여 전기 신호로

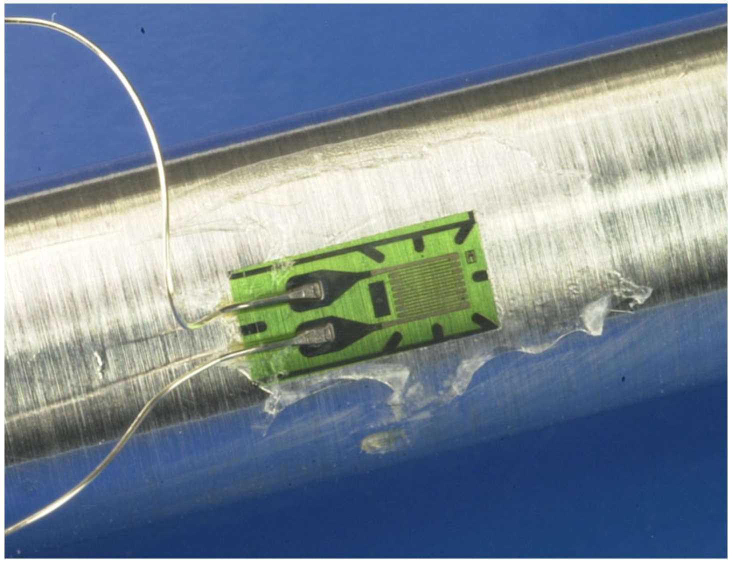


- 변형률 게이지는 종이 같은 배경지
- 가느다란 선이 평행 → 측정하고자 하는 재료에 부착
- 재료가 변형하면 게이지의 선도 늘어나게 되어
- 전기적인 저항이 달라지게
- 이때 흐르는 전류를 측정하면 변형 정도를 정확하게 측정

변형률 게이지 사진







 TheMAD

변형률의 측정 - 로제트 (rosette)

변형률 로제트

- 식 (3)에서 θ의 각도로 놓여진 스트레인 게이지에서의 변형률은 다음과 같음

$$\varepsilon(\theta) = \ cos^2\theta \cdot \varepsilon_x + sin^2\theta \cdot \varepsilon_y + sin\theta cos\theta \cdot \gamma_{xy} \qquad \textbf{(10)}$$

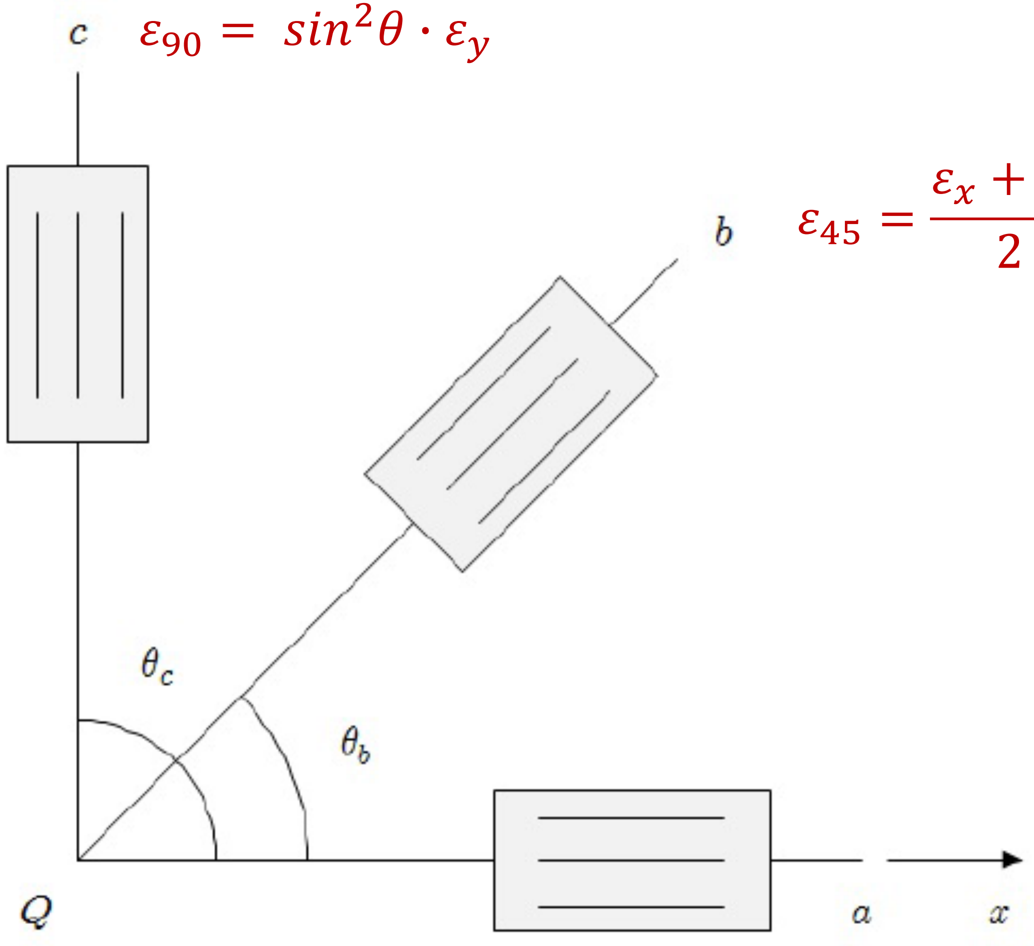
- 만일 다수의 게이지를 각각 다른 방향을 향하도록 하여 측정
- 전단변형률, 주변형률 등을 간접적으로 구할 수
- 이를 변형률 로제트(strain rosette)라고 부른다.

- 예를 들어, 3개의 변형률 게이지를 각각 x축과 y축과 일치되는 방향으로 설치하고 나머지 하나를 45도 각도로 놓으면 변형률 로제트가 구성된다. 식 (10)에서 $\theta = 45°$ 를 대입하면 그때의 변형률 ε_{45} 는

$$\varepsilon_{45} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\gamma_{xy}}{2} \qquad \textbf{(11)}$$

로제트를 사용한 변형률 측정 예

$$\varepsilon(\theta) = \cos^2\theta \cdot \varepsilon_x + \sin^2\theta \cdot \varepsilon_y + \sin\theta\cos\theta \cdot \gamma_{xy} \qquad \textbf{(10)}$$



$$\varepsilon_{90} = \sin^2\theta \cdot \varepsilon_y$$

$$\varepsilon_{45} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

$$\varepsilon_0 = \cos^2\theta \cdot \varepsilon_x$$

로제트를 사용한 변형률 측정 예

- 식 (11)을 정리하여 γ_{xy} 에 대하여 쓰면 다음과 같다.

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{45} - (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \qquad (12)$$

- 3개의 게이지에서 들어오는 변형률에 대한 정보는 각각 ε_x, ε_y, ε_{45}가 되므로
- 식 (12)에 대입하면 전단변형률 γ_{xy}를 구할 수 있다.
- 이것은 매우 유용한 방법으로서 측정하기가 어려운 **전단변형률을 간접적인 방법으로 얻을 수 있음.**

예제 4.

- **3개의 게이지가 재료 표면 위에서 x축, y축, 그리고 수평으로 부터 45도 각도로 놓여져 있다. 각 게이지로 부터 들어온 변형률의 값은 $\varepsilon_x = 100\mu,\ \varepsilon_y = 50\mu,\ \varepsilon_{45} = 150\mu$ 였다면 이때의 전단변형률 γ_{xy}를 계산하시오.**

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{45} - (\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

$$= 2\times(150\mu) - (100\mu + 50\mu) = 150\mu$$

다양한 구성의 로제트

- 다양한 구성의 변형률 로제트를 사용하면 필요한 변형률을 측정하는 것이 가능
- 가장 간단한 것은 기존의 x축이나 y축과의 일치하는 방향으로 게이지를 설치하는 것이나
- 현장의 여건 등에 따라서는 원하는 방향으로 설치하지 못하게 될 수도 있다.
- 3개의 게이지로 구성된 로제트를 사용하여 각 방향으로의 변형률을 구할 수 있다.
- 세 개의 게이지로 부터 측정된 $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c$ 를 식 (13)에 대입하면 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ 에 대한 연립 방정식이 되므로 해를 구하면 각 좌표축 방향에 대한 변형률을 계산할 수 있다.

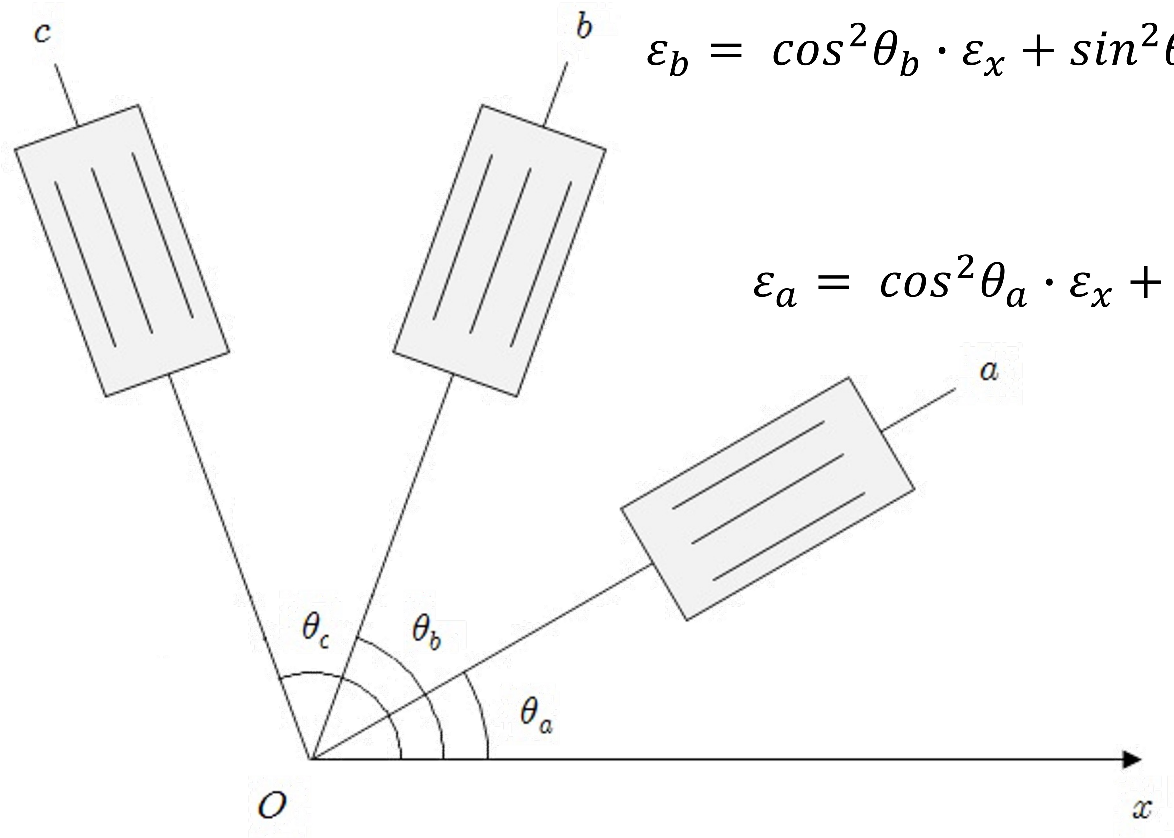
$$
\begin{aligned}
\varepsilon_a &= cos^2\theta_a \cdot \varepsilon_x + sin^2\theta_a \cdot \varepsilon_y + sin\theta_a cos\theta_a \cdot \gamma_{xy} \\
\varepsilon_b &= cos^2\theta_b \cdot \varepsilon_x + sin^2\theta_b \cdot \varepsilon_y + sin\theta_b cos\theta_b \cdot \gamma_{xy} \qquad (13) \\
\varepsilon_c &= cos^2\theta_c \cdot \varepsilon_x + sin^2\theta_c \cdot \varepsilon_y + sin\theta_c cos\theta_c \cdot \gamma_{xy}
\end{aligned}
$$

다양한 구성의 로제트

$$\varepsilon_c = \ cos^2\theta_c \cdot \varepsilon_x + sin^2\theta_c \cdot \varepsilon_y + sin\theta_c cos\theta_c \cdot \gamma_{xy}$$

$$\varepsilon_b = \ cos^2\theta_b \cdot \varepsilon_x + sin^2\theta_b \cdot \varepsilon_y + sin\theta_b cos\theta_b \cdot \gamma_{xy}$$

$$\varepsilon_a = \ cos^2\theta_a \cdot \varepsilon_x + sin^2\theta_a \cdot \varepsilon_y + sin\theta_a cos\theta_a \cdot \gamma_{xy}$$



예제 5.

- **세 개의 변형률 게이지가 재료 표면 위에서 수평으로 부터 시계 반대 방향으로 0, 45, 60도의 각도로 각각 놓여져 있다. 각 게이지로 부터 측정된 변형률의 값이** $\varepsilon_a = 20\mu$, $\varepsilon_b = 350\mu$, $\varepsilon_c = 30\mu$ **였다면 이때의 변형률** ε_x, ε_y, γ_{xy}**를 계산하시오.**

$$\varepsilon_a = cos^2\theta_a \cdot \varepsilon_x + sin^2\theta_a \cdot \varepsilon_y + sin\theta_a cos\theta_a \cdot \gamma_{xy}$$

$$\varepsilon_b = cos^2\theta_b \cdot \varepsilon_x + sin^2\theta_b \cdot \varepsilon_y + sin\theta_b cos\theta_b \cdot \gamma_{xy}$$

$$\varepsilon_c = cos^2\theta_c \cdot \varepsilon_x + sin^2\theta_c \cdot \varepsilon_y + sin\theta_c cos\theta_c \cdot \gamma_{xy}$$

$$680\mu = \varepsilon_y + \gamma_{xy}$$

$$100\mu = 3 \cdot \varepsilon_y + \sqrt{3} \cdot \gamma_{xy}$$

$$20\mu = \varepsilon_x + \cancel{sin^2\theta_a \cdot \varepsilon_y} + \cancel{sin\theta_a cos\theta_a \cdot \gamma_{xy}} = \varepsilon_x \qquad \therefore \varepsilon_x = 20\mu$$

$$350\mu = cos^2 45° \cdot (20\mu) + sin^2 45° \cdot \varepsilon_y + sin45° cos45° \cdot \gamma_{xy}$$

$$30\mu = cos^2 60° \cdot (20\mu) + sin^2 60° \cdot \varepsilon_y + sin60° cos60° \cdot \gamma_{xy}$$

$$350\mu = (\frac{1}{2}) \cdot (20\mu) + (\frac{1}{2}) \cdot \varepsilon_y + (\frac{1}{2}) \cdot \gamma_{xy}$$

$$30\mu = (\frac{1}{4}) \cdot (20\mu) + (\frac{3}{4}) \cdot \varepsilon_y + (\frac{\sqrt{3}}{4}) \cdot \gamma_{xy}$$

예제 5.

- **세 개의 변형률 게이지가 재료 표면 위에서 수평으로 부터 시계 반대 방향으로 0, 45, 60도의 각도로 각각 놓여져 있다. 각 게이지로 부터 측정된 변형률의 값이** $\varepsilon_a = 20\mu$, $\varepsilon_b = 350\mu$, $\varepsilon_c = 30\mu$ **였다면 이때의 변형률** ε_x, ε_y, γ_{xy}**를 계산하시오.**

$680\mu = \varepsilon_y + \gamma_{xy}$

$100\mu = 3 \cdot \varepsilon_y + \sqrt{3} \cdot \gamma_{xy}$

$\therefore \varepsilon_y = 680\mu - \gamma_{xy} \quad \rightarrow \quad 100\mu = 3 \cdot (680\mu - \gamma_{xy}) + \sqrt{3} \cdot \gamma_{xy}$

$(3 - \sqrt{3}) \cdot \gamma_{xy} = 3 \cdot 680\mu - 100\mu$

$\therefore \ \gamma_{xy} = 1530.03\mu$

$\therefore \varepsilon_y = 680\mu - \gamma_{xy}$

$= 680\mu - 1530.03\mu = -850.03\mu \qquad \therefore \varepsilon_y = -850.03\mu$

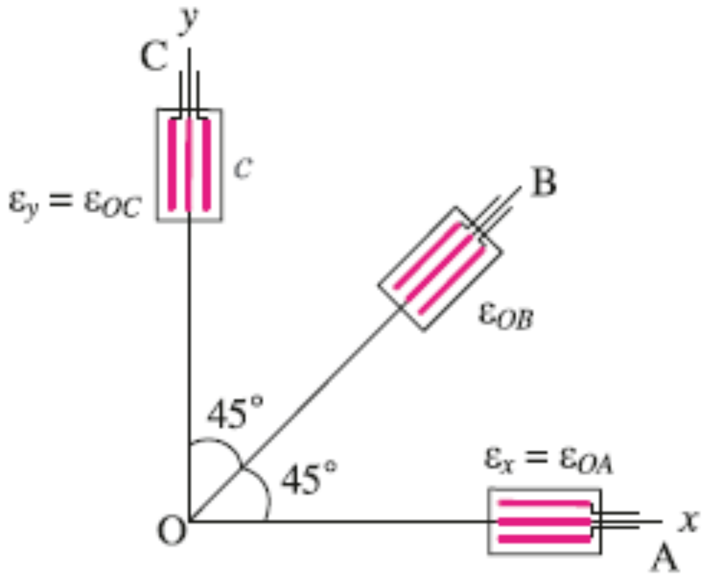
$\therefore \varepsilon_x = 20\mu$

$\varepsilon_y = -850.03\mu$

$\gamma_{xy} = 1530.30\mu$

예제 6.

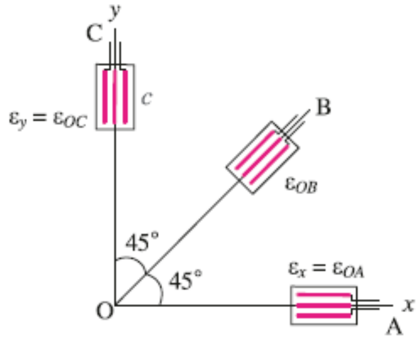
- 로제트를 사용하여 각 방향 수직변형률을 다음과 같이 측정. 전단변형률을 계산하고 Mohr 원을 이용하여 주변형률의 크기와 방향을 구하라.



$$\epsilon_{OA} = 3 \times 10^{-6}$$
$$\epsilon_{OB} = 2.5 \times 10^{-6}$$
$$\epsilon_{OC} = 1 \times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_0 = cos^2\theta \cdot \varepsilon_x \qquad \varepsilon_{45} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\gamma_{xy}}{2} \qquad \varepsilon_{90} = sin^2\theta \cdot \varepsilon_y$$

예제 6.



$\epsilon_{OA} = 3 \times 10^{-6}$
$\epsilon_{OB} = 2.5 \times 10^{-6}$
$\epsilon_{OC} = 1 \times 10^{-6}$

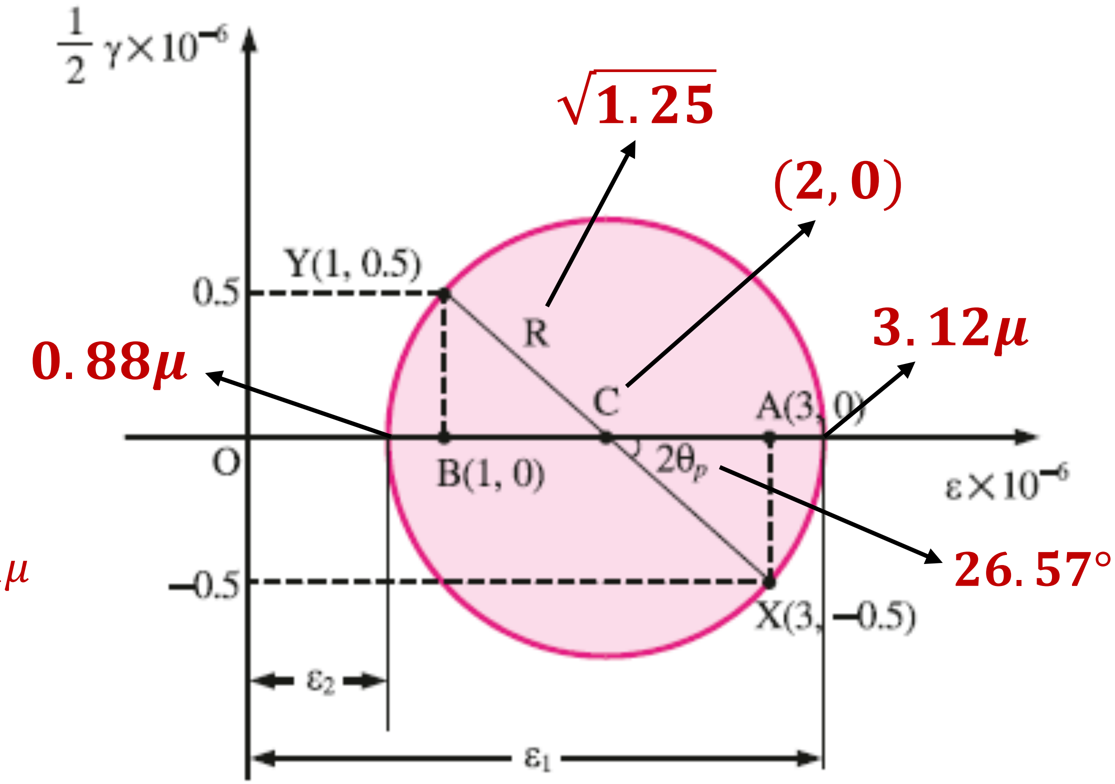
$$\varepsilon_0 = \varepsilon_x = 3\mu$$

$$\varepsilon_{90} = \varepsilon_y = 1\mu$$

$$\varepsilon_{45} = \frac{3\mu + 1\mu}{2} + \frac{\gamma_{xy}}{2} = 2.5\mu \quad \therefore \gamma_{xy} = 1\mu$$

$$\varepsilon_{1,2} = 2 \pm \sqrt{1.25} = 3.12\mu \quad or \quad 0.88\mu$$

$$tan2\theta_P = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} = \frac{1}{2} \qquad \therefore 2\theta_P = tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 26.57° \; or \; 206.57°$$



TheMAD

3D 변형률 성분과 체적변형률

- **3차원(x-y-z 직교좌표계)에서 한점의 변형률은 6개의 성분으로 정의됨**

- **XY 평면에서의 변형률** $\varepsilon_{xx} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\varepsilon_{yy} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\gamma_{xy} = \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}$

- **YZ 평면에서의 변형률** $\varepsilon_{yy} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\varepsilon_{zz} = \dfrac{\partial w}{\partial z}$, $\gamma_{yz} = \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}$

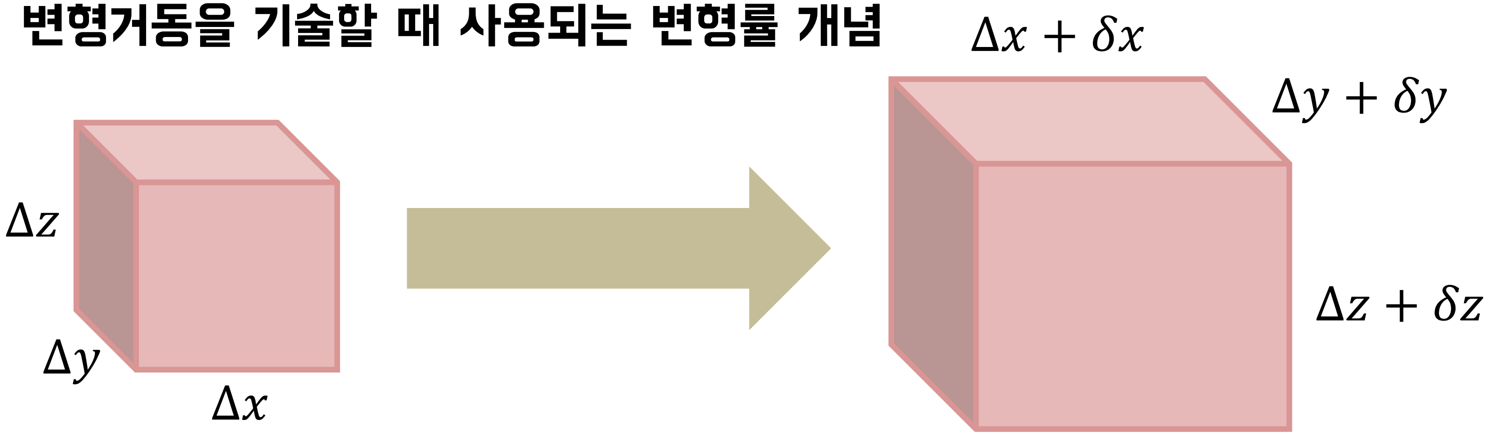
- **ZX 평면에서의 변형률** $\varepsilon_{zz} = \dfrac{\partial w}{\partial z}$, $\varepsilon_{xx} = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\gamma_{zx} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}$

여기서 u, v, w **는 각각** x, y, z **방향의 변위**

3D 변형률 성분과 체적변형률

체적변형률 (volumetric strain, e)

- 응력이 작용하기 전의 초기 부피에 대한 부피변화량의 비
- 암석의 변형거동을 기술할 때 사용되는 변형률 개념



$$V_0 = \Delta x \Delta y \Delta z \qquad V = (\Delta x + \delta x)(\Delta y + \delta y)(\Delta z + \delta z)$$

$$e = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{(\Delta x + \delta x)(\Delta y + \delta y)(\Delta z + \delta z) - \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z}$$

$$= \frac{\Delta x(1 + \overset{\varepsilon_{xx}}{\delta x/\Delta x})(\Delta y + \delta y)(\Delta z + \delta z) - \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z}$$

$$= \frac{\Delta x \Delta y \Delta z(1 + \varepsilon_{xx})(1 + \varepsilon_{yy})(1 + \varepsilon_{zz}) - \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z}$$

3D 변형률 성분과 체적변형률

체적변형률 (volumetric strain, e)

- 응력이 작용하기 전의 초기 부피에 대한 부피변화량의 비
- 암석의 변형거동을 기술할 때 사용되는 변형률 개념

$$e = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{(\Delta x + \delta x)(\Delta y + \delta y)(\Delta z + \delta z) - \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z}$$

$$= \frac{\Delta x(1 + \overbrace{\delta x / \Delta x}^{\varepsilon_{xx}})(\Delta y + \delta y)(\Delta z + \delta z) - \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z}$$

$$= \frac{\Delta x \Delta y \Delta z(1 + \varepsilon_{xx})(1 + \varepsilon_{yy})(1 + \varepsilon_{zz}) - \Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z}$$

$$= (1 + \varepsilon_{xx})(1 + \varepsilon_{yy})(1 + \varepsilon_{zz}) - 1$$

$$= (1 + \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy})(1 + \varepsilon_{zz}) - 1$$

$$= \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz}$$

$$\approx \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \cancel{\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}} + \varepsilon_{zz} + \cancel{\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}} + \cancel{\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz}} + \cancel{\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz}}$$

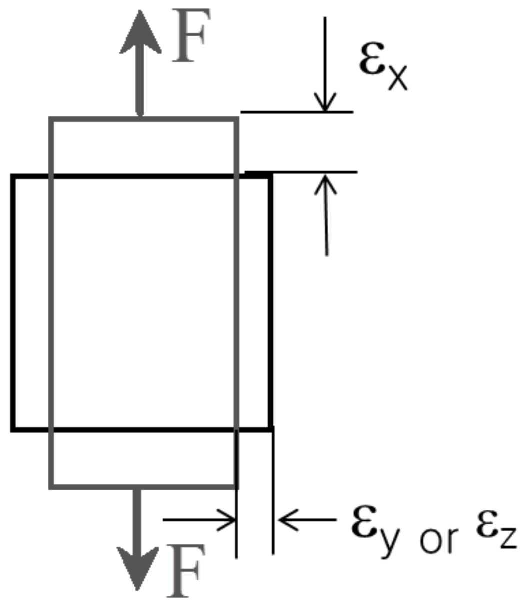
$$= \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

응력 - 변형률 변환

일반화된 Hook의 법칙 (응력 - 변형률 변환)

- 인장 시험에서는 힘이 가해지는 방향으로의 변형 → 다른 방향으로의 변형도 발생됨.
- 예를 들어, x 축 방향으로 인장이 가해지고 있을 때의 변형률을 ε_x라고 하면
- y축과 z축 방향으로는 수축 변형이 일어나게 된다.
- 힘이 가해지고 있는 방향의 변형률과 그에 수직인 변형률의 비를 다음과 같이 정의하고 이를 프랑스 과학자 Poisson (1781-1840)의 이름을 따서 Poisson 비(Poisson's ratio)

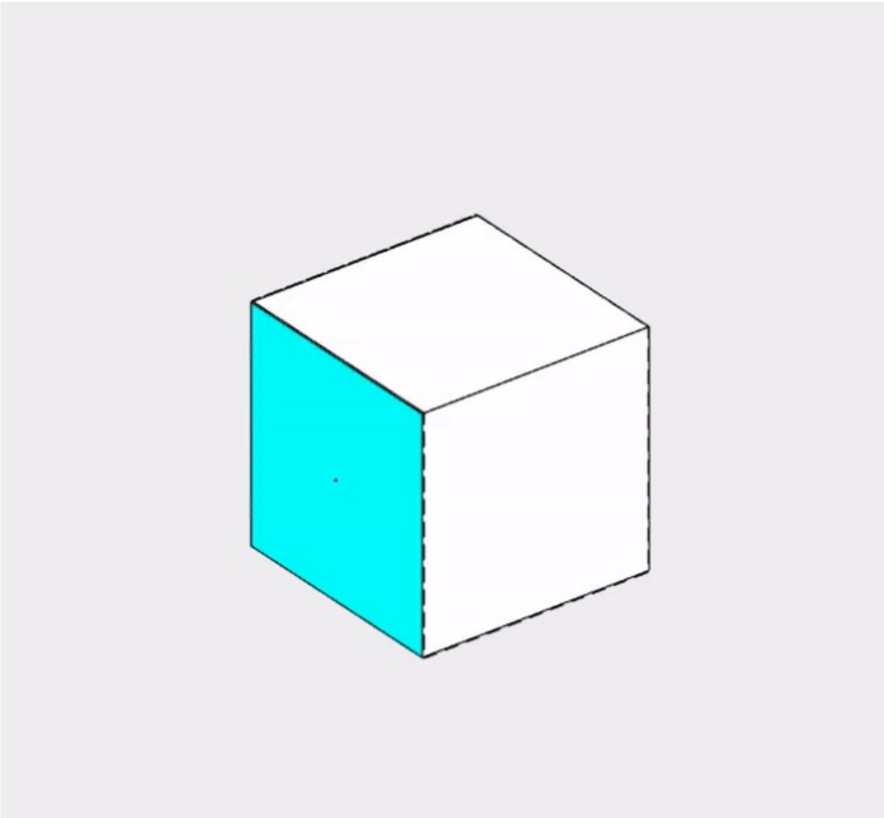
$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = -\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \qquad (14)$$



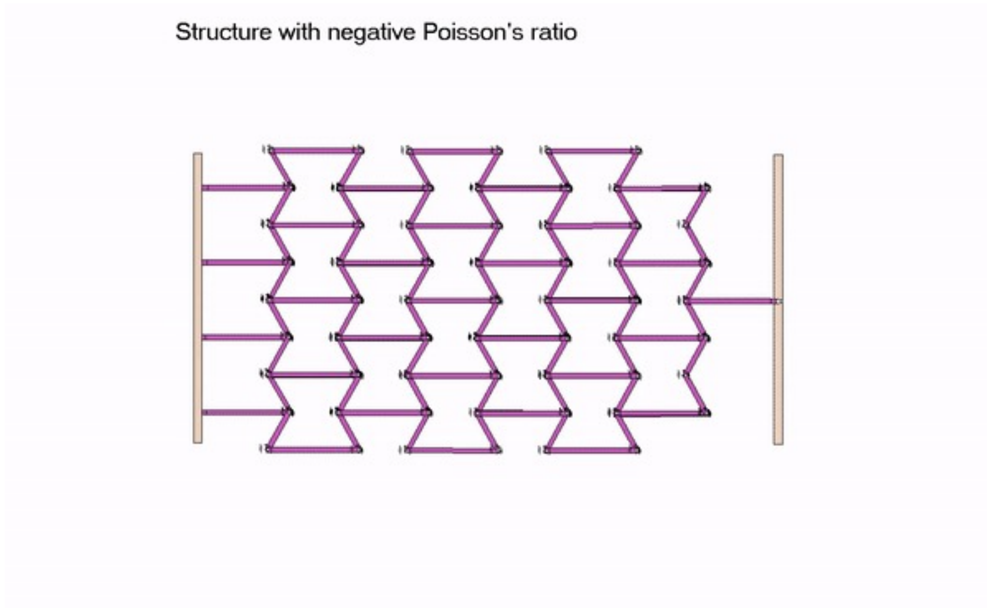
- Poisson 비는 탄성 등방성 재료에서는
- -1 보다 작을 수 없고 0.5 보다 큰 값을 가질 수 없으며
- 대부분의 금속은 0.3 정도의 값을 갖는다.

일반화된 Hook의 법칙

Positive Poisson's ratio



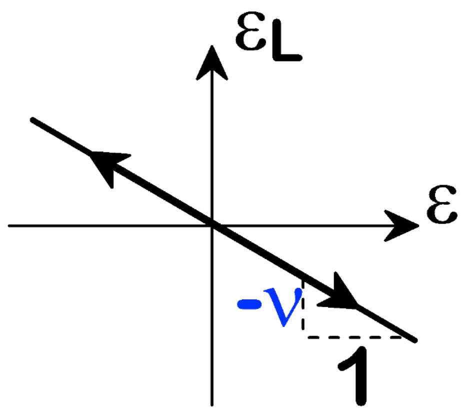
Negative Poisson's ratio



일반화된 Hook의 법칙

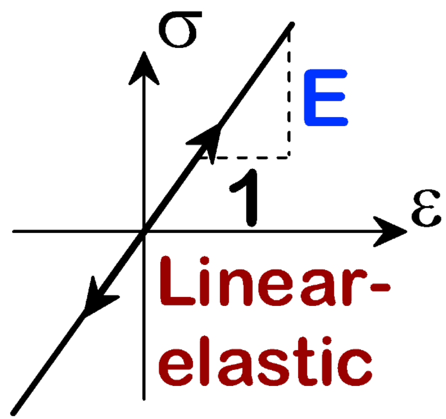
- 만일, x축 방향으로의 인장 응력 σ_x가 가해지고 있다고 하면 식 (14)으로 부터 y축과 z축 방향으로는 수축되는 변형률의 크기는 다음과 같이 계산할 수 있음.

$$\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x, \qquad \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x \qquad \textbf{(15)}$$



- 그런데 Hook의 법칙에 의해서 $\varepsilon_x = \sigma_x/E$이므로 이를 식 에 각각 대입하면

$$\varepsilon_y = -\nu\frac{\sigma_x}{E}, \qquad \varepsilon_z = -\nu\frac{\sigma_x}{E} \qquad \textbf{(16)}$$



TheMAD

3축 응력 상태에서 Hook 의 법칙

- 이번에는 y축(또는 z축) 방향으로 응력 σ_y (또는 σ_z)가 작용한다면 각 축 방향으로의 변형률은 위에서와 유사한 방법으로 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}$$
$$\varepsilon_x = -\nu\varepsilon_y = -\nu\frac{\sigma_y}{E} \qquad \textbf{(17)}$$
$$\varepsilon_z = -\nu\varepsilon_y = -\nu\frac{\sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$
$$\varepsilon_x = -\nu\varepsilon_z = -\nu\frac{\sigma_z}{E} \qquad \textbf{(18)}$$
$$\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_z = -\nu\frac{\sigma_z}{E}$$

- 3축 응력상태에서는 위의 결과를 모두 중첩하여 변형률을 계산함

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}\sigma_z$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_z \qquad \textbf{(19)}$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z - \frac{\nu}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y$$

일반화된 Hook 의 법칙 - 행렬표현

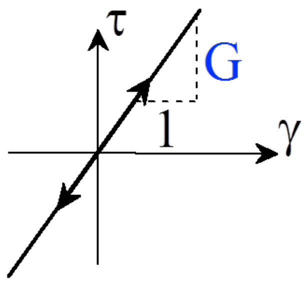
- **3축 응력상태의 변형률을 행렬로 표현하면,**

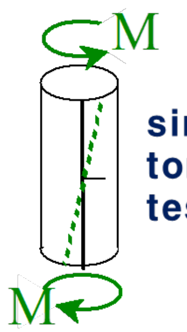
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}\sigma_z$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_z$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z - \frac{\nu}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y$$

$$E\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -\nu & -\nu\\ -\nu & 1 & -\nu\\ -\nu & -\nu & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\end{bmatrix} \qquad \textbf{(20)}$$

- **3축 전단변형률과 전단 응력상태의 변형률을 행렬로 표현하면,**

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}$$
$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz} \qquad \textbf{(21)}$$
$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{zx}$$





simple torsion test

- **등방성 재료의 경우 전단계수** G **는 다음의 관계에 있음** $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$

일반화된 Hook 의 법칙 - 응력 기준 표현

- 식 (19), (21) 을 응력을 기준으로 표시하면

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}\sigma_z$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_z$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z - \frac{\nu}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y$$

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)]$$
$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_z + \varepsilon_x)]$$
$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}$$
$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz}$$
$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{zx}$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}$$
$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}$$
$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}$$

일반화된 Hook 의 법칙 - 응력 기준 표현

- **행렬로 표시하면 다음과 같음**

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}$$

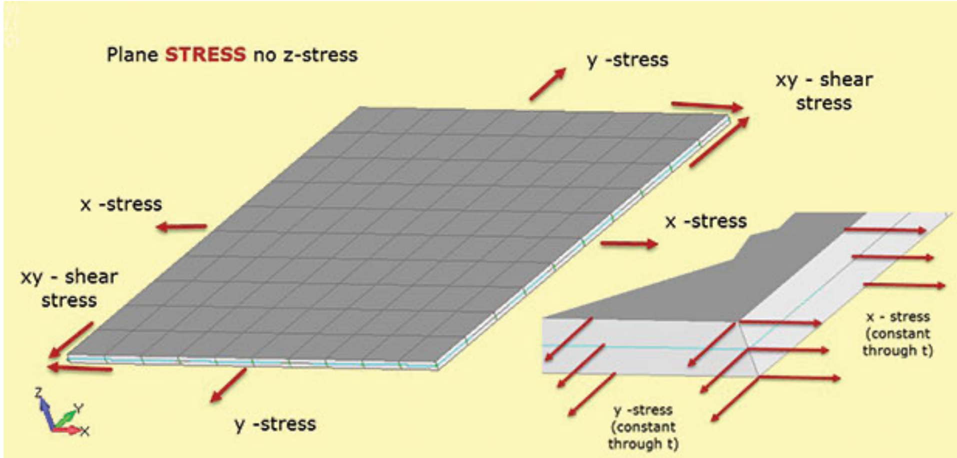
$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}$$

특수 상황에서의 응력과 변형률

평면응력상태 (한방향의 응력 = 0)

- 세가지 방향 중 한가지 방향의 응력을 '0'으로.
- z축의 응력 $\sigma_z = 0,\ \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ 을 적용
- ex) 매우 얇은 평판의 성형

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & 0 \end{bmatrix}$$



- 이 경우 식(19)와 (21)는 아래와 같이 간략화 됨

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y - \cancel{\frac{\nu}{E}}\sigma_z = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}\sigma_x - \cancel{\frac{\nu}{E}}\sigma_z = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x)$$

$$\varepsilon_z = \cancel{\frac{1}{E}}\sigma_z - \frac{\nu}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = \cancel{\frac{2(1+\nu)}{E}}\tau_{yz} = 0$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = \cancel{\frac{2(1+\nu)}{E}}\tau_{xz} = 0$$

예제 7.

- **측정된 변형률이** $\varepsilon_x = 1{,}000\mu,\ \varepsilon_y = 500\mu,\ \gamma_{xy} = 800\mu$**로 주어질 때** $\sigma_x, \sigma_y,\ \varepsilon_z$ **를 구하시오. 단, 탄성계수** $E = 70\ GPa$ **와 Poisson 비** $\nu = 0.3$**이고 평면응력 상태(z축 응력 = 0)**

$$E\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -\nu & -\nu\\ -\nu & 1 & -\nu\\ -\nu & -\nu & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\end{bmatrix}$$

$$70\ GPa\begin{bmatrix}1000\mu\\ 500\mu\\ \varepsilon_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -0.3 & -0.3\\ -0.3 & 1 & -0.3\\ -0.3 & -0.3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ 0\end{bmatrix}$$

$$70\times10^9 Pa\times1{,}000\times10^{-6} = \sigma_x - 0.3\sigma_y \quad\rightarrow\quad 7\times10^7 Pa = \sigma_x - 0.3\sigma_y$$

$$70\times10^9 Pa\times500\times10^{-6} = -0.3\sigma_x + \sigma_y \quad\rightarrow\quad 3.5\times10^7 Pa = -0.3\sigma_x + \sigma_y$$

$$70\times10^9 Pa\times\varepsilon_z = -0.3\sigma_x - 0.3\sigma_y \quad\rightarrow\quad 70\times10^9 Pa\times\varepsilon_z = -0.3\sigma_x - 0.3\sigma_y$$

예제 7.

- **측정된 변형률이** $\varepsilon_x = 1{,}000\mu,\ \varepsilon_y = 500\mu,\ \gamma_{xy} = 800\mu$**로 주어질 때** $\sigma_x, \sigma_y,\ \varepsilon_z$ **를 구하시오. 단, 탄성계수** $E = 70\ GPa$ **와 Poisson 비** $\nu = 0.3$**이고 평면응력 상태(z축 응력 = 0)**

$$7\times10^7 Pa = \sigma_x - 0.3\sigma_y \quad \rightarrow \quad \sigma_x = 0.3\sigma_y + 7\times10^7 Pa$$

$$3.5\times10^7 Pa = -0.3\sigma_x + \sigma_y$$

$$70\times10^9 Pa\times\varepsilon_z = -0.3\sigma_x - 0.3\sigma_y$$

$$3.5\times10^7 Pa = -0.3(0.3\sigma_y + 7\times10^7 Pa) + \sigma_y$$

$$0.91\sigma_y = 5.6\times10^7 Pa \qquad \therefore\ \sigma_y = 6.15\times10^7 Pa = 61.54\ MPa$$

$$\sigma_x = 0.3\sigma_y + 7\times10^7 Pa \qquad \therefore\ \sigma_x = 8.85\times10^7 Pa = 88.46\ MPa$$

$$70\times10^9 Pa\times\varepsilon_z = -0.3\sigma_x - 0.3\sigma_y \qquad \therefore\ \varepsilon_z = -642.86\mu$$

예제 8.

$\sigma_z = 0, \tau_{xz} = 0, \tau_{yz} = 0$ $\varepsilon_x = 0$

- 가로가 b이며 세로가 h 인 두께가 **매우 얇은 평판**이 있다. **가로 방향의 변형은 제한**되어있고 하중의 작용으로 세로 방향으로 Δh만큼 늘어났다. 이때 평판에서의 응력 σ_x, σ_y와 변형률 ε_z를 구하시오. 단, 탄성계수는 E, Poisson 비는 ν 이다.

$$E\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -\nu & -\nu\\ -\nu & 1 & -\nu\\ -\nu & -\nu & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\end{bmatrix} \qquad E\begin{bmatrix}0\\ \Delta h/h\\ \varepsilon_z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -\nu & -\nu\\ -\nu & 1 & -\nu\\ -\nu & -\nu & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ 0\end{bmatrix}$$

$$0 = \sigma_x - \nu\sigma_y \quad \rightarrow \quad \sigma_x = \nu\sigma_y$$

$$E\,\Delta h/h = -\nu\sigma_x + \sigma_y \qquad E\,\Delta h/h = -\nu(\nu\sigma_y) + \sigma_y$$

$$E\varepsilon_z = -\nu\sigma_x - \nu\sigma_y \qquad \sigma_y(1-\nu^2) = E\,\Delta h/h$$

$$\therefore \sigma_y = \frac{\Delta hE}{h(1-\nu^2)}$$

$$\therefore \sigma_x = \frac{\nu\Delta hE}{h(1-\nu^2)}$$

$$\therefore \varepsilon_z = \frac{-\nu\Delta hE}{hE(1-\nu^2)}(1+\nu) = \frac{-\nu\Delta h}{h(1-\nu)}$$

평면변형률 상태 (한 방향의 변형률 = 0)

- **세가지 변형률 중 한가지 방향의 변형률이 '0'인 상태.**
- **(z 방향으로 매우 두꺼운 상태 - 댐과 같은)**
- $\varepsilon_z = 0, \gamma_{zy} = \gamma_{zx} = 0$**을 적용함.**
- **식 (4.24)에 적용하면 아래와 같음.**

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\left(\varepsilon_y + \cancel{\varepsilon_z}\right)\right] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right]$$

$$\sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\cancel{\varepsilon_z} + \varepsilon_x)\right] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right]$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\cancel{(1-\nu)\varepsilon_z} + \nu\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y\right)\right] = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}$$

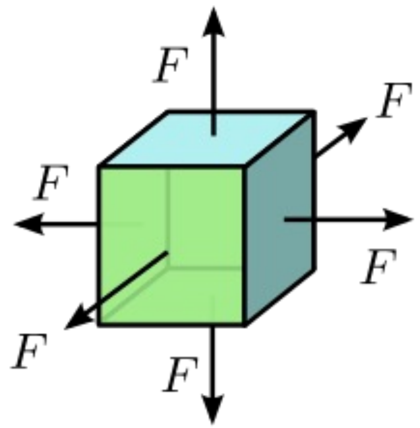
$$\cancel{\tau_{zy} = G\gamma_{zy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}}$$

$$\cancel{\tau_{xz} = G\gamma_{xz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}}$$

TheMAD

직교이방성 재료

- **등방성(Isotropic) 재료: x, y, z 세 방향 어디로 당겨도 동일한 힘과 변형률이 발생함**



- **이방성(Anisotropic) 재료: 등방성이 아닌 재료**
- **직교 이방성(Orthotropic) 재료: 이방성 재료 중 수직되는 어느 한 방향에서 성질이 다른 재료**
- **예) 목재, 섬유강화 복합재료**

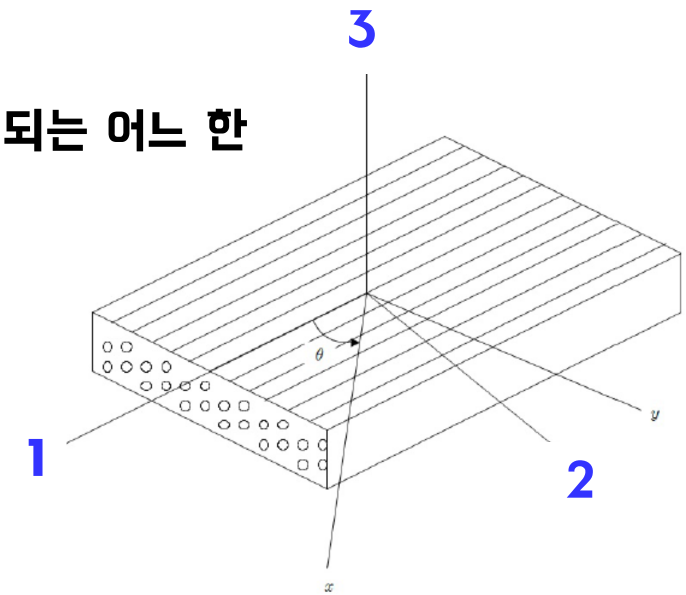


Figure: 직교 이방성 재료(섬유 강화 복합재료)

TheMAD

직교이방성 재료에서 Hook의 법칙

- **1번 축 방향으로 $\sigma_1 = \sigma$의 하중을 적용하면 응력과 변형률, Poisson 비는 각각 다음과 같은 식으로 정리할 수 있음.**

$$\sigma_1 = \sigma, \qquad \sigma_2 = \sigma_3 = 0$$
$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} \qquad \textbf{(22)}$$
$$\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

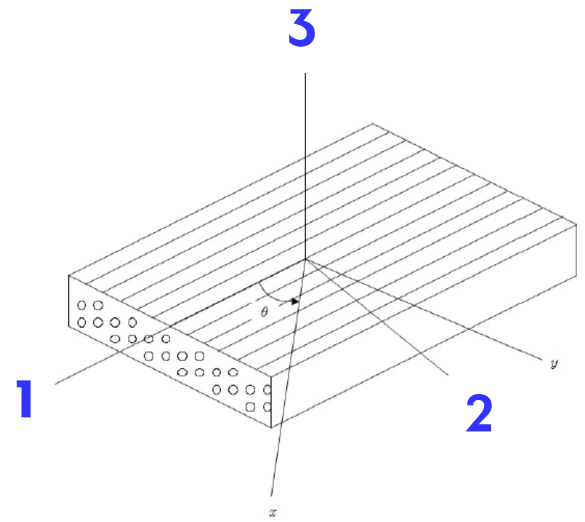


Figure: 직교 이방성 재료(섬유 강화 복합재료)

- **같은 방식을 2번 축 방향으로 $\sigma_2 = \sigma$ 의 하중을 적용하면,**

$$\sigma_1 = \sigma, \qquad \sigma_1 = \sigma_3 = 0$$
$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} \qquad \textbf{(23)}$$
$$\nu_{21} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$
$$\gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_{12}}$$

TheMAD

직교이방성 재료에서 Hook 의 법칙

- 1, 2번 축 방향으로 동시에 하중이 가해진다고 하면 Hook의 법칙은 중첩의 원리에 의해 다음과 같이 정리될 수 있음.

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} - \nu_{21}\frac{\sigma_2}{E_2}$$
$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} - \nu_{12}\frac{\sigma_1}{E_1} \qquad (24)$$
$$\gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_{12}}$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}\sigma_z$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\sigma_y - \frac{\nu}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_z$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z - \frac{\nu}{E}\sigma_x - \frac{\nu}{E}\sigma_y$$

- 응력을 기준으로 표현하면 다음과 같음

$$\sigma_1 = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}(\varepsilon_1 + \nu_{21}\varepsilon_2)$$
$$\sigma_2 = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}(\varepsilon_2 + \nu_{12}\varepsilon_1) \qquad (25)$$
$$\tau_{12} = G_{12}\gamma_{12}$$

직교이방성 재료에서 Hook 의 법칙

- **3축 응력상태의 변형률을 행렬로 표현하면,**

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\end{bmatrix} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix}1 & -\nu & -\nu\\ -\nu & 1 & -\nu\\ -\nu & -\nu & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3}\\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3}\\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\end{bmatrix}$$

직교이방성 재료에서 Hook 의 법칙

- 직교 이방성 재료에서의 Poisson 비와 강성도에 대한 아래 관계식에 따라 식(25)에 나타난 5개의 재료상수 중 4개만이 독립임.

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \qquad \textbf{(26)}$$

$$\sigma_1 = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}(\varepsilon_1 + \nu_{21}\varepsilon_2)$$
$$\sigma_2 = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}(\varepsilon_2 + \nu_{12}\varepsilon_1) \qquad \textbf{(25)}$$
$$\tau_{12} = G_{12}\gamma_{12}$$

재료	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	ν_{12}	G_{12} (GPa)
Carbon/epoxy AS4/3501-6	131	11.2	0.28	6.55
Carbon/epoxy T300/5208	153	11.2	0.33	7.1
Boron/epoxy	204	18.5	0.23	5.59
Kevlar 49/epoxy	76	5.5	0.34	2.3
E-glass/epoxy	38.6	8.27	0.26	4.14

예제 9.

- **Kevlar 49/epoxy 복합재료에 섬유 길이 방향(1방향)으로 $\sigma_1 = 100\ MPa$ 수직되는 2방향으로 $\sigma_2 = -20\ MPa$ 의 응력이 작용하고 있을 때 각 방향에서의 변형률 ε_1 과 ε_2 를 계산하시오.**

재료	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	ν_{12}	G_{12} (GPa)
Carbon/epoxy AS4/3501-6	131	11.2	0.28	6.55
Carbon/epoxy T300/5208	153	11.2	0.33	7.1
Boron/epoxy	204	18.5	0.23	5.59
Kevlar 49/epoxy	76	5.5	0.34	2.3
E-glass/epoxy	38.6	8.27	0.26	4.14

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \qquad \frac{0.34}{76\ GPa} = \frac{\nu_{21}}{5.5\ GPa}$$

$$\therefore \nu_{21} = 0.02460\ \ldots$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} - \nu_{21}\frac{\sigma_2}{E_2} = \frac{100\times10^6\ Pa}{76\times10^9\ Pa} - \nu_{21}\frac{-20\times10^6\ Pa}{5.5\times10^9\ Pa} = 1405.24\mu$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} - \nu_{12}\frac{\sigma_1}{E_1} = \frac{-20\times10^6\ Pa}{5.5\times10^9\ Pa} - 0.34\frac{100\times10^6\ Pa}{76\times10^9\ Pa} = -4083.73\mu$$

변형률 에너지

- 외부 하중에 의하여 재료에 가해진 일(work)은 재료의 변형을 일으키며 재료 내부에서 변형률 에너지(strain energy)의 형태로 저장됨.

- 여기서 어떤 형태의 에너지 손실은 없다고 가정하면, 변형률 에너지는 하중이 제거되고 구속 조건이 없어질 때 원래의 형태로 재료를 회복시키게 된다.

- 단면적 A, 길이 L인 봉에 하중 P가 천천히 가해지고 있다고 가정하면 변형을 일으키는 데 사용되는 일 W는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$W = \int_0^{\Delta} P dx \qquad \textbf{(27)}$$

Δ: 봉의 늘어난 길이

TheMAD

변형률 에너지

- 외부 하중에 의한 일이 모두 변형에 쓰여졌다고 가정하면 변형률 에너지 U_e 는 다음과 같음

$$W = \int_0^{\Delta} P dx \tag{27}$$

$$W = U_e = V \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon \tag{28}$$

봉의 체적 $V = AL$, σ는 응력, ε 은 변형률

- 봉의 재료가 선형 탄성의 성질을 가진다고 가정하면 Hook의 법칙에 의하여 $\sigma = E\varepsilon$ 이며 E 는 탄성계수이므로 식 (28)는 다음과 같음

$$U_e = V \int_0^{\sigma} \frac{\sigma}{E} d\sigma = V\left(\frac{\sigma^2}{2E}\right) \tag{29}$$

- 일반적으로 변형률 에너지 U_e 를 체적으로 나눈 단위 체적당의 변형률 에너지 또는 변형률 에너지 밀도(strain energy density) u_e 를 많이 사용함.

$$u_e = \frac{U_e}{V} = \left(\frac{\sigma^2}{2E}\right) \tag{30}$$

전단 변형률 에너지

- 전단응력 τ가 작용하는 경우에서 변형률 에너지 밀도도 유사하게 다음과 같이 정의됨

$$u_e = \int_0^{\gamma} \tau d\gamma \qquad \textbf{(31)}$$

- 선형 탄성 재료에 대해서는 $\tau = G\gamma$ 가 성립되므로 전단응력에 의한 변형률 에너지 밀도는 다음과 같이 주어진다.

$$u_e = \int_0^{\tau} \frac{\tau}{G} d\tau = \frac{\tau^2}{2G} \qquad \textbf{(32)}$$

- 전체 체적에 대한 변형률 에너지는 변형률 에너지 밀도를 체적으로 다음과 같이 적분함으로 얻어질 수 있다.

$$U_e = \int_V u_e dV = \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV \qquad \textbf{(33)}$$

축 하중에 의한 변형률 에너지

- **길이가 *L*, 단면적이 *A*인 봉에 하중 *P*가 작용하고 있는 경우의 변형률 에너지는 식 (30)으로부터 다음과 같이 계산될 수 있다**

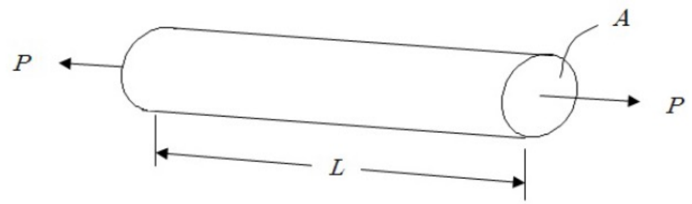


Figure: 축하중과 원형 단면 봉

$$U_e = \int_V u_e dV = \int_V \frac{\sigma_x^2}{2E} dV = \int_0^L \frac{1}{2E} (\frac{P}{A})^2 A dx = \int_0^L \frac{P^2}{2AE} dx$$

$$\sigma_x = P/A,\ dV = Adx$$

- **따라서 축하중에 의한 변형률 에너지는 다음과 같음**

$$U_e = \frac{P^2 L}{2AE}$$

예제 10.

- **길이가 $2L$이며 균일한 단면적을 가지는 봉에 축 하중 $3P$ 가 작용하고 있을 때의 변형률 에너지를 계산하시오. 단, 탄성계수는 E 이다.**

$$U_e = \int_V u_e dV = \int_V \frac{\sigma_x^2}{2E} dV = \int_0^L \frac{1}{2E} (\frac{P}{A})^2 A dx = \int_0^L \frac{P^2}{2AE} dx$$

$$U_e = \int_0^{2L} \frac{(3P)^2}{2AE} dx = 2L \frac{9P^2}{2AE} = \frac{9P^2 L}{AE}$$

단위 체적당 변형률 에너지

- 앞에서는 하나의 축에서 작용하는 단축응력에 의한 변형률 에너지 계산에 대하여 알아보았다.
- 재료 내부의 임의의 점에서의 일반적인 응력상태는 3차원 응력 성분을 모두 포함하고 있다.
- 선형 탄성재료에서는 단위 체적당의 변형률 에너지를 다음과 같이 정의한다.

$$U_e = \frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx})$$